Université du Maine
UFR Sciences

18 juin 2008

LICENCE ST mention MECANIQUE

Echanges thermiques
Contrôle - 2nde session

1. Conduction de la chaleur en régime dépendant du temps

Le sol considéré comme un solide semi-infini est initialement à une température $T_0 = 20°C$, puis il est porté brutalement à $T_S = 1000°C$ en surface pendant 24 h par une coulée de lave d'un volcan proche.

a) Ecrire l'équation de la conduction pour la température en fonction de x (profondeur de pénétration dans le sol), du temps t, et de la diffusivité thermique ($a = \dfrac{\lambda}{\rho c}$).

b) Après avoir effectuer le changement de variable $u = \dfrac{x}{2\sqrt{at}}$, résoudre l'équation générale de la conduction en fonction de u en introduisant la fonction mathématique *erf* définie par $erf(u) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\zeta^2) d\zeta$. Montrer que la température du sol est :

$$T = T_S + (T_0 - T_S) erf(u)$$

c) Déterminer la profondeur de sécurité telle que la température reste inférieure à 50°c en sol sec puis humide. Même question à 30°C. On pourra utiliser le tableau de valeurs de la fonction *erf* figurant au verso. En quoi les résultats (analytiques) obtenus sont-ils caractéristiques d'un processus de diffusion ?

Diffusivité thermique du sol : sol sec $a = 3.10^{-7}$ m^2/s, sol humide $a = 4.10^{-7}$ m^2/s.

2. Rayonnement thermique

Après le coucher du soleil, l'énergie rayonnée peut être ressentie par une personne qui se tient à proximité d'un mur de briques. Un tel mur peut fréquemment avoir une température de 45°C, et son pouvoir d'émission (degré de noirceur) est de l'ordre de 0.9.

a) Quel est le flux thermique rayonné par unité de surface par un tel mur ?

b) Quelle est la longueur d'onde correspondant au maximum d'énergie rayonnée ? De quel type de rayonnement s'agit-il ?

u	erf u	u	erf u	u	erf u
0.0	0.0000	0.8	0.74210	1.60	0.97635
0.05	0.05637	0.85	0.77067	1.65	0.98038
0.1	0.11246	0.9	0.79691	1.70	0.98379
0.15	0.16800	0.95	0.82089	1.75	0.98667
0.2	0.22270	1.0	0.84270	1.80	0.98909
0.25	0.27633	1.05	0.86244	1.85	0.99111
0.3	0.32863	1.10	0.88020	1.90	0.99279
0.35	0.37938	1.15	0.89612	1.95	0.99418
0.4	0.42839	1.20	0.91031	2.00	0.995322
0.45	0.47548	1.25	0.92290	2.1	0.997020
0.5	0.52050	1.30	0.93401	2.2	0.998137
0.55	0.56332	1.35	0.94376	2.3	0.998857
0.6	0.60386	1.40	0.95228	2.4	0.999311
0.65	0.64203	1.45	0.95970	2.5	0.999593
0.7	0.67780	1.50	0.96610	3.0	0.999978
0.75	0.71116	1.55	0.97162	3.6	1.00000

Tableau de valeurs de la fonction erreur (*erf*)

1) Conduction.

a) Equation de la chaleur $\lambda \Delta T + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$.

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$ diffusivité thermique ; $\dot{q} = 0$ (pas de source).

$T = T(x,t) \longrightarrow a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$.

b) On pose $\theta = T - T_S$ $\quad$ T_S : température de surface ($= 1000°C$)

$a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ $\quad$ On pose $u = \frac{x}{2\sqrt{at}}$ $\quad$ ($\theta = \theta(u)$?).

. $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\theta}{du}\frac{1}{2\sqrt{at}}$ et $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{4at}\frac{d^2\theta}{du^2}$.

. $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{du}\frac{\partial u}{\partial t}$ avec $\frac{du}{u} = -\frac{dt}{2t} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{u}{2t}$.

soit $\frac{a}{4at}\frac{d^2\theta}{du^2} = -\frac{u}{2t}\frac{d\theta}{du} \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{du^2} + 2u\frac{d\theta}{du} = 0$

On pose $y(u) = \frac{d\theta}{du}$ $\quad$ $\frac{dy}{du} + 2uy = 0$ $\quad$ $\frac{dy}{y} = -2u\,du$

$d(\log y) = -du^2 \Rightarrow y = y_0 e^{-u^2}$.

d'où $\theta(u) = y_0 \int_{u_0}^{u} e^{-\xi^2} d\xi$.

× Condition limite en $x = 0$: $T = T_S \Rightarrow \theta(u(x=0)) = 0 = \theta(0)$.

$\Rightarrow u_0 = 0$.

× Condition ~~limite~~ initiale à $t = 0$: $T = T_0 \Rightarrow \theta = \theta_0 = T_0 - T_S$ ($T_0 = 20$

$t = 0^+ \Leftrightarrow u = +\infty$

$\theta(u) = y_0 \int_0^u e^{-\xi^2} d\xi = A \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\xi^2} d\xi = A\, \mathrm{erf}(u)$.

avec $\theta_0 = A\, \mathrm{erf}(+\infty) = A$.

Finalement $\theta = \theta_0\, \mathrm{erf}(u)$ soit $T = T_S + (T_0 - T_S)\, \mathrm{erf}(u)$.

②

c) $u = \mathrm{erf}^{-1}\left(\dfrac{T - T_S}{T_0 - T_S}\right) = \dfrac{x}{2\sqrt{at}}$.

. $T = 50°c$ $T_S = 1000°c$ $T_0 = 20°c$

$u = \mathrm{erf}^{-1}\left(\dfrac{950}{980}\right) = \mathrm{erf}^{-1}(0.9694) = 1.53$.

$t = 24^h = 86400\,s$

$\Rightarrow x = 2u\sqrt{at} = 2 \times 1.53\,(86400 \cdot 3 \cdot 10^{-7})^{\frac{1}{2}} = 0.49\ m$ (sol sec)

$= \quad - \quad 4 \cdot 10^{-7} = 0.57\ m$ (– humide)

x proportionnel à $\sqrt{t}$ caractéristique d'un phénomène de <u>diffusion</u>.

. $T = 30°c$ $u = \mathrm{erf}^{-1}\left(\dfrac{970}{980}\right) = \mathrm{erf}^{-1}(0.9898) = 1.82$.

$x = 2 \cdot 1.82 \cdot (86400 \cdot 3\ 10^{-7})^{\frac{1}{2}} = 0.59\ m$ (sol sec)

$- \quad 4 \cdot 10^{-7} = 0.68\ m$ (sol humide).

2) <u>Rayonnement</u> :

a) Loi de Stephan-Boltzmann :

densité de flux rayonné $= \varphi = \varepsilon \sigma T^4$

$= 0.9 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}\,(273+45)^4 = 522\ W/m^2$

b) Loi de Wien. $\lambda_{max} \cdot T = 2.9\ mm \cdot K$.

$\lambda_{max} = \dfrac{2.9}{273+45} = 9.12\ \mu m$.

→ rayonnement dans l'Infra-rouge lointain.

Université du Maine
UFR Sciences et Techniques

Licence ST mention mécanique
6 mai 2008

MEC326B - Transferts thermiques

contrôle terminal, 1ère session

Exercice : Thermodynamique du moulage et effets thermiques associés

On s'intéresse à une opération industrielle de moulage de pièces plastiques (plasturgie). Il s'agit de pièces plastiques fabriquées dans le secteur de l'automobile. Dans une première approximation ces pièces sont considérées comme ayant une symétrie de révolution cylindrique pour un rayon moyen a.

1- Le liquide, de chaleur massique c_ℓ, servant à fabriquer les pièces moulées arrive dans le moule à la température T_ℓ, pour une masse m_ℓ. L'opération de moulage se traduit par un transfert de chaleur par conduction thermique dans le métal entourant l'empreinte du moule. On suppose, en première approximation, qu'une zone cylindrique du métal de rayon $R = a + e$, où e est l'épaisseur effective de métal, est affectée par ce transfert. Le métal, de chaleur massique c_s, est initialement à la température T_0, pour une masse m_s. Écrire le bilan calorimétrique élémentaire, et en déduire la quantité de chaleur échangée entre le liquide et le métal, ainsi que la température moyenne T_m obtenue. Application numérique (pour le calcul de T_m) pour les données suivantes : $m_\ell = 0{,}1$ kg ; $c_\ell = 4180$ J / kg K ; $T_\ell = 240$ °C ; $m_s = 10$ kg ; $c_s = 480$ J / kg K; $T_0 = 25$ °C.

2- La chaleur apportée au cours de l'opération de moulage (calculée à la question précédente) s'évacue par conduction thermique dans le métal du moule. Il s'agit d'une configuration de type "choc thermique" pour laquelle, il faut considérer l'équation de la chaleur dépendant du temps. Ecrire cette équation pour le cas où l'épaisseur $e << a$ (géométrie localement plane). En utilisant la méthode de séparation des variables, sous la forme $\theta(r,t) = T(r,t) - T_0 = \tau(t)\, R(r)$, évaluer les parties radiales et temporelles, $\tau(t)$ et $R(r)$, respectivement solutions de l'équation différentielle de départ. Montrer notamment une dépendance exponentielle pour la partie temporelle, en $\exp(-\chi k^2 t)$, où χ représente la diffusivité thermique et où k est une constante d'intégration a priori arbitraire. Montrer enfin que le gradient radial de la température s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = \left[- k\, A \sin kr + k\, B \cos kr \right] \exp\,(- \chi\, k^2 t) \ .$$

3- <u>Utiliser</u> les conditions de continuité à l'interface du moule (pour $r = a$), à la fois sur la température et sur le flux de chaleur échangée en supposant le gradient de température écrit sous forme d'une différence finie, $(T_\ell - T_0)\ /\ a$. <u>Aboutir</u> à une expression générale du champ de température dans le solide sous la forme :

$$\theta(r,t) = \theta_{\ell,0} \left[\left(\sin k\,a + \frac{\lambda_\ell}{\lambda_s} \frac{\cos k\,a}{k\,a} \right) \sin kr + \left(\cos k\,a - \frac{\lambda_\ell}{\lambda_s} \frac{\sin k\,a}{k\,a} \right) \cos kr \right] \exp\,(- \chi\, k^2 t) \ ,$$

avec $\theta_{\ell,0} = T_\ell - T_0$. <u>Vérifier</u> que cette expression aboutit bien à la relation de continuité des températures, sous la forme $T(a,0) = T_\ell$.

4- Au final, on ne conservera que la dépendance temporelle, en fonction de $\exp\,(- \chi\, k^2 t)$, sans chercher à décrire les évolutions spatiales du champ de température. Pour de tels problèmes, le nombre de Biot $B_i = \dfrac{h\,a}{\lambda}$ est pris de l'ordre du produit $k\ a$. Sachant que la conductance thermique h vaut ici 150 W / m^2 °C, et que la conductivité thermique de l'acier λ est prise égale à 50 W / m K, pour a = 0,1 m, <u>calculer</u> le temps nécessaire (un ordre de grandeur est suffisant) pour observer une décroissance de température moyenne du moule d'acier.

5- La valeur numérique obtenue à la question précédente est trop forte, et pour limiter l'échauffement moyen du moule supposé avoir une température uniforme, un circuit d'eau froide est installé. Il est constitué de tubes de diamètre $\phi = 2\ cm$, parallèles à l'axe du moule. <u>On suppose dorénavant l'opération de moulage terminée, et il n'y a plus d'apport de chaleur par le liquide de moulage</u>. On se place juste à la limite entre régime laminaire et régime turbulent, pour lequel la formule de Dittus-Boelter est valide, à savoir : $N_u = 0{,}023\ R_e^{0,8} P_r^{0,3}$, où $N_u = \dfrac{h\,\phi}{\lambda}$. <u>Calculer</u> le nombre de Nusselt, sachant que la nombre de Prandtl de l'eau à 20 °C est environ 8. <u>Calculer</u> aussi la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau dans le tube, sachant que le nombre de Reynolds est environ 2200, pour une conductivité thermique de l'eau à 20 °C de l'ordre de 0,6 W / m °C. On prendra pour la viscosité dynamique de l'eau, $\mu = 10^{-3}$ kg m s^{-1}.

6- <u>Ecrire</u> le bilan thermique des échanges entre le tube contenant l'eau de refroidissement et le métal environnant, le flux thermique extrait du métal chaud élevant la température de l'eau (fluide caloporteur) pour une longueur totale de tube de 1m. Evaluer alors la température finale du métal T_f en fonction d'une durée Δt de circulation du fluide caloporteur. Montrer notamment que la dépendance entre T_f et Δt n'est pas linéaire, et que le refroidissement du métal est globalement plus rapide en présence du dispositif de convection forcée.

Thermodynamique du moulage et effets thermiques associés

Les calculs présentés ici sont le plus souvent des approximations grossières, basées sur des méthodes analytiques, qui ne prétendent pas fournir de description précise et exacte des phénomènes, mais à la place des ordres de grandeur utiles pour un pré-dimensionnement.

<u>Etape I</u> : Echauffement moyen de la matière au cours de l'injection.

Il s'agit d'un bilan calorimétrique élémentaire.

$$m_s c_s (T_e - T_s) = m_\ell c_\ell (T_\ell - T_e)$$

$$\Rightarrow \quad T_e = \frac{m_\ell c_\ell T_\ell + m_s c_s T_s}{m_s c_s + m_\ell c_\ell},$$

avec :
- m_ℓ : masse de liquide injectée
- m_s : masse solide du moule "affectée" par l'échauffement de température
- c_ℓ : chaleur massique du liquide
- c_s : chaleur massique du solide
- T_ℓ : Température initiale du liquide
- T_s : Température initiale du solide
- T_e : Température d'équilibre

soit en considérant les valeurs suivantes :

$m_\ell = 0,1$ kg ; $m_s = 10$ kg ou 100 kg

$C_\ell = 1$ cal/g°C ; $c_s = 0,1$ cal/g°C

$T_\ell = 500$ K (220°c) ; $T_s = 300$ K (20°c)

* Pour $m_s = 100$ kg (valeur un peu forte)

$\Rightarrow T_e = 302$ K $\Rightarrow \Delta T = 2$°C

* Pour $m_s = 10$ kg (valeur un peu faible)

$\Rightarrow T_e = 318$ K $\Rightarrow \Delta T = 18$°C

<u>Note</u> : La valeur de m_s ne peut être qu'une estimation. Il ne s'agit pas de la masse totale du moule, mais plutôt de celle du métal qui environne la coulée de moulage, celle qui est "affectée" par l'élévation de température. Bien entendu, le calcul de ΔT est une moyenne pour la partie du moule entourant la coulée. Le moule, du fait de son importante masse, joue le rôle d'un "thermostat". C'est ce qui explique une élévation moyenne de T faible lorsque l'on effectue le bilan thermique à l'échelle du moule complet.

<u>Etape 2</u> : Refroidissement naturel de la matière par conduction

On considère l'équation de la chaleur en régime variable, correspondant à un choc thermique pour un cylindre de rayon a de la veine d'injection :

$$\lambda \Delta T = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \text{où :}$$

λ : conductivité thermique du solide
ρ : masse volumique du solide
c : chaleur massique du solide

Soit $\chi \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$, avec $\chi = \frac{\lambda}{\rho c}$

χ : diffusivité thermique du solide

On utilise alors la méthode de séparation des variables, c'est à dire en notant :

$$T(r,t) = \mathcal{T}(t) R(r)$$

$$\Rightarrow \quad R(r) \frac{d\mathcal{T}}{dt} = \chi \Delta T = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \chi \mathcal{T} \frac{d^2 R}{dr^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\chi \mathcal{T}} \frac{d\mathcal{T}}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = cte = -k^2 > 0$$

D'où $\frac{d\mathcal{T}}{dt} + k^2 \chi \mathcal{T} = 0$, de solution

$$\mathcal{T}(t) = cte \times \exp(-\chi k^2 t)$$

Il reste alors à résoudre :

$$\frac{d^2R}{dr^2} + k^2 R = 0 \Rightarrow R(r) = C\cos kr + D\sin kr,$$

soit au total :

$$\underset{s}{T}(r,t) - T_0 = e^{-\chi k^2 t} \times (A\cos kr + B\sin kr),$$

avec $A = cte \times C$; $B = cte \times D$

On peut alors calculer le gradient radial de la température $\frac{\partial T}{\partial r}$:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = e^{-\chi k^2 t} \times (-kA\sin kr + Bk\cos kr)$$

Il reste alors à écrire et valider les conditions aux limites, ainsi que la condition initiale.

1) Continuité de la température à l'interface liquide / solide (soit en $r=a$)

$$T_s|_{r=a} = T_e \text{ , valide en } t=0$$

$$\Rightarrow \quad A\cos ka + B\sin ka = T_e - T_0 \quad (1)$$

2) continuité du flux de chaleur à l'interface liquide/solide (soit en $r=a$)

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r}\bigg|_{r=a} \text{ , en } t=0$$

$$\Rightarrow \lambda_s(-Ak\sin ka + Bk\cos ka) = \lambda_e\left(\frac{T_e - T_0}{a}\right) \quad (2)$$

$(1)\times\cos ka - (2)\times\sin ka$

$$\Rightarrow A = (T_e - T_0)\cos ka - \frac{\lambda_e}{\lambda_s}\left(\frac{T_e - T_0}{ka}\right)\sin ka$$

$(1)\times\sin ka - (2)\times\cos ka$

$$\Rightarrow B = (T_e - T_0)\sin ka + \frac{\lambda_e}{\lambda_s}\left(\frac{T_e - T_0}{ka}\right)\cos ka$$

3) $T_s(r) = T_e = T_s$ pour $t = 0$, en $r = a$

avec $T_s(r,t) = e^{-\chi k^2 t}(A\cos kr + B\sin kr)$

$$\Rightarrow T_s(r) - T_0 = e^{-\chi k^2 t}\Big[\Big((T_e - T_0)\cos ka - \frac{\lambda_e}{\lambda_s}\left(\frac{T_e - T_0}{ka}\right)\sin ka\Big)\cos kr$$
$$+ \Big((T_e - T_0)\sin ka + \frac{\lambda_e}{\lambda_s}\left(\frac{T_e - T_0}{ka}\right)\cos ka\Big)\sin kr\Big]$$

$$\Rightarrow T_s - T_0 = \Big((T_e - T_0)\cos ka - \frac{\lambda_e}{\lambda_s}\left(\frac{T_e - T_0}{ka}\right)\sin ka\Big)\cos ka$$
$$+ \Big((T_e - T_0)\sin ka + \frac{\lambda_e}{\lambda_s}\left(\frac{T_e - T_0}{ka}\right)\cos ka\Big)\sin ka$$

$\Rightarrow T(a,t) = T_e$, CQFD

Au total $T_s \sim e^{-\chi k^2 t}\, T_e$

fonction ↘ du temps, dépend de l'argument χk^2, avec $\chi = \lambda/\rho c = 0{,}12\times10^{-4}\ m^2/s$ pour l'acier

Pour de tels problèmes, le terme ka est lié au nombre de Biot, $Bi = \frac{ha}{\lambda}$, analogue au nombre de Nusselt (pour les fluides)

si $\begin{cases} h = 150 \ W/m^2 \ °C \\ \lambda = 50 \ W/m \ K \\ a = 0,1 \ m \end{cases}$

alors $Bi = 0,3$. Sachant que

$ka \simeq Bi \Rightarrow k \simeq \frac{Bi}{a} \# 3$

décroissance temporelle de l'ordre de

$e^{-\chi k^2 t}$, avec $k^2 \simeq 10$

et $\chi = 0,12 \times 10^{-4} \ m^2/s$

$\Rightarrow e^{-\chi k^2 t} \sim e^{-10^{-4} t}$

Pour une décroissance significative de la température, il faut que $t \simeq 10^3$ à $10^4 s$ c'est-à-dire une durée de refroidissement par conduction naturelle de l'ordre de l'heure ($10^3 s$).

Etape 3 : Refroidissement accéléré par convection forcée

Sachant que le régime d'écoulement du fluide refroidissant est a priori turbulent, il faut utiliser la relation suivante liant le nombre de Nusselt (Nu) au nombre de Reynolds (Re) et au nombre de Prandtl (Pr)

$$Nu = 0{,}023 \, Re^{4/5} \, Pr^{2/5}$$

(formule de Dittus - Boelter),

avec $Nu = \dfrac{h\phi}{\lambda}$, où

h est la conductance thermique et ϕ le diamètre des tubes de refroidissement

Pour un nombre de Reynolds, à la transition turbulence / laminaire,

$Re = 2200$ et $Pr^{eau}(20°C) = 8$

$$\Rightarrow Nu = 0{,}023 \times 2200^{0,8} \times 8^{0,3}$$

$$\Rightarrow Nu = 20$$

$$h = \frac{Nu\,\lambda}{\phi} = \frac{20 \times 0{,}6}{0{,}02} = 600 \ \mathrm{W/m^2\,°C}$$

Le flux thermique perdu par la conduite de refroidissement sert à refroidir le solide du moule alors que le liquide de refroidissement se réchauffe. Il faut donc écrire une relation de bilan thermique :

$$q = h\,S\,(T_s - T_e) = \left(\cancel{m_s C_s (T_s - T_f)}\right)$$
$$= -\dot{m}_e C_e (T_e - T_f),$$

avec $S = \pi \phi \times L$ et Δt la durée d'écoulement du fluide caloporteur.
T_f : température finale

$$\Rightarrow q = \pi L\, Nu\, \lambda\, (T_s - T_e) = m_s C_s (T_s - T_f),$$

soit en notant $T_f = T_e + (\Delta T)_{refroid.}$

$$\Rightarrow \pi L\, Nu\, \lambda (T_s - T_e) = m_s C_s (T_s - T_e) - m_s C_s (\Delta T_r)$$

$$\Rightarrow \Delta T_r = \left(1 - \frac{\pi L\, Nu\, \lambda}{m_s C_s}\right)(T_s - T_e)$$

Application numérique

$$Nu = 20 \; ; \; \lambda = 0,6 \ W/m\,°C$$

$$m_s = 100\,kg \; ; \; C_s = 0,5 \ J/g\,°C$$

$$\Rightarrow \Delta T_2 = \left(1 - \frac{\pi \times 20 \times 0,6}{100 \times 500}\right)(T_s - T_e)$$

La différence $T_s - T_e$ correspond à l'élévation de température du moule calculée à l'étape 1, soit environ 20°C pour $m_s = 100$ kg. D'où finalement $\Delta T_2 \# 0,25(T_s - T_e)$, soit $\Delta T_2 \simeq 5°C$.

Une autre façon de procéder consiste à écrire T_f directement sous la forme

$$T_f = \frac{m_s C_s T_s + \dot{m}_e C_e T_e \Delta t}{m_s C_s + \dot{m}_e C_e \Delta t}$$

Pour $\Delta t = 0$, $T_f = T_s$, c'est à dire que la température finale du moule reste celle de départ, après échauffement suit à la coulée. Par contre, pour $\Delta t \to \infty$, alors $T_f = T_e$, c'est à dire que la température finale du moule sera celle de l'eau de refroidissement. Pour des durées intermédiaires Δt, tout dépend alors du flux d'eau circulant dans la conduite de refroidissement, $\dot{m}_e = \frac{dm_e}{dt}$

Il faut donc prendre en compte la vitesse U d'écoulement du fluide dans la conduite. On peut aussi utiliser la définition du nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{U \rho \phi}{\mu} = 2200$$

$$\Rightarrow U = \frac{2200\, \mu}{\rho \phi} = \frac{2200 \times 10^{-3}}{1000 \times 0{,}02}$$

$$\Rightarrow U \sim 0{,}1 \text{ m/s} \quad (10 \text{ cm/s})$$

- Finalement, la relation de la page 9 fournissant T_f peut être inversée pour calculer Δt permettant d'atteindre une cible en terme de refroidissement.

On note la définition du flux $\dot{m}_e$ de masse liquide de refroidissement :

$$\dot{m}_e = \frac{\Delta m_e}{\Delta t} = \rho\, v\, \frac{\phi^2}{4} \times \pi$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{4\, m_s\, c_s}{\rho\, v\, \pi\, \phi^2 c_e} \times \left(\frac{T_s - T_f}{T_f - T_e} \right)$$

avec $m_s = 100\ kg$; $c_s = 0{,}5\ J/g\,°C$

$\rho = 10^3\ kg/m^3$; $\phi = 0{,}02\ m$

$c_e = 4{,}18\ J/g\,°C$

$$\Delta t = \frac{4 \times 100 \times 0{,}5}{10^3 \times \pi \times 0{,}1 \times 4{,}18 \times 4 \times 10^{-4}} \left(\frac{T_s - T_f}{T_f - T_e} \right)$$

$$\Delta t = 380 \left(\frac{T_s - T_f}{T_f - T_e} \right),$$

avec $T_s > T_f > T_e$

$T_e = 20°C$, $T_s = T_e + \Delta T \simeq 40°C$ (cf étape 1)

Au total, si l'on prend $T_f = T_e + 5°C$ ou bien si l'on prend $T_f = T_e + 10°C$, on obtient des résultats différents.

$$T_f = T_e + 5°C \Rightarrow \frac{T_s - T_f}{T_f - T_e} = 3,$$

d'où $\Delta t \# 10^3 s$ (20 minutes)

$$\text{si } T_f = T_e + 10°C \Rightarrow \frac{T_s - T_f}{T_f - T_e} = 1,$$

d'où $\Delta t \# 380 s$ (6 minutes).

La relation n'est pas linéaire entre Δt et T_f. Plus la cible en température est basse, et plus le temps de refroidissement en convection forcée devient long.

Université du Maine
UFR Sciences et Techniques

Licence ST mention mécanique
6 mai 2008

MEC326B - Transferts thermiques

contrôle continu n°2, 1ère session

Exercice : Champ de température d'une sphére immergée dans un fluide

Une sphère de rayon R et de coefficient de conductivité thermique λ_1 est immergée dans un liquide immobile de conductivité thermique λ_2. Une source de chaleur est disposée très loin de la sphère (à la limite à l'infini) produisant un gradient de température supposé constant dans le fluide de la forme $\frac{dT}{dr} = A$, où r représente la coordonnée radiale prise autour de la sphère ($r = 0$ correspond simplement à son centre), et où A est une constante positive. Le champ de température est donc implicitement supposé être une fonction de la coordonnée radiale r uniquement.

1- En dehors des sources thermiques, qui sont donc repoussées à l'infini, il est supposé que l'équation de la chaleur se réduit à l'équation de Laplace $\Delta T = 0$, où Δ représente le Laplacien scalaire. La solution générale de cette équation est prise sous la forme de deux termes distincts. Le premier est noté $T(r) = A\,r$. Montrer qu'une telle solution vérifie bien l'équation de Laplace en tout point r. Le deuxième terme est pris sous la forme $T(r) = A / r^2$. Montrer qu'il valide bien la condition limite pour r infini, mais que par contre, il existe une singularité au centre de la sphère (pour $r = 0$).

2- Justifier finalement que le champ de température admissible s'écrit pour la sphère $T_1(r) = C_1\,A\,r$, et pour le fluide l'entourant $T_2(r) = A\,r + C_2\,A / r^2$, où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires. Ecrire alors les conditions aux limites à la surface de la sphère (en $r = R$) à la fois sur le champ de température, ainsi que sur le flux de chaleur échangée. Aboutir ainsi au calcul des deux constantes C_1 et C_2. Montrer que le champ de température à l'intérieur de la sphère et dans le fluide environnant s'écrit finalement sous la forme :

Pour r < R, $T_1(r) = \dfrac{3\,\lambda_2}{\lambda_1 + 2\,\lambda_2}\,A\,r$; **Pour r > R,** $T_2(r) = \left[1 + \left(\dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + 2\,\lambda_2}\right)\left(\dfrac{R}{r}\right)^3\right] A\,r$.

3- Montrer alors que les deux conditions aux limites de la question 2- sont bien vérifiées à la surface de la sphère (en $R = r$) à la fois pour le champ de température, ainsi que pour le flux de chaleur échangée. Que se passe-t-il lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, c'est à dire pour le cas où la sphère et le liquide l'entourant possèdent la même conductivité thermique ? Est-ce que le résultat obtenu vous semble normal ?

4- On suppose dorénavant que le fluide caloporteur entourant la sphère se déplace avec la vitesse U le long d'un axe noté y. Ecrire alors l'équation de Fourier généralisée à deux dimensions (ici notées x et y). Est-ce que le champ de température vérifie encore dans ce cas une équation de Laplace du type $\Delta T = 0$? Par quelle équation générique faut-il la remplacer. En repartant du champ de température dans le fluide de la question 2-, admissible ici que pour de faibles vitesses d'écoulement U, montrer alors que $\Delta T = U A / \chi$, où χ représente la diffusivité thermique $\chi = \frac{\lambda}{\rho C_P}$. Discuter ce résultat, ainsi que les hypothèses et le cas limite où $U = 0$ (absence d'écoulement).

Licence ST mention Mécanique

MEC 326B – Transferts thermiques

CC2, 1ère session, Mai 2008

Exercice : Champ de température d'une sphère immergée dans un fluide

1 – La source thermique située à l'infini impose une condition aux limites du type :

$\nabla T = A$ pour $r \to \infty$,

soit $\Delta T = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T = 0$, pour r quelconque

Les solutions proposées sont du type :

$T = \vec{A} \cdot \vec{r} = A r$, ou bien

$T = \vec{A}\, \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = A/r^2$

* si $T = Ar \Rightarrow \nabla T = A$, d'où un champ valide jusqu'en $r \to 0$

$\Rightarrow \Delta T = 0, \ \forall r$

* si $T = A/r^2 \Rightarrow \nabla T = -\frac{2A}{r^3}$

et $\Delta T = 6A/r^4$, soit $\Delta T = 0$ pour r suffisamment grand. Par contre, il existe une singularité pour $r \to 0$.

D'où :

$$\begin{cases} T_1 = C_1 A r & \text{dans la sphère solide} \\ T_2 = C_2 \dfrac{A}{r^2} + A r & \text{dans le fluide} \end{cases}$$

2 – Il faut prendre en compte les conditions limites à la surface de la sphère (en $r = R$), à savoir :

* continuité de la température : $T_1\big|_{r=R} = T_2\big|_{r=R}$

$$\Rightarrow \quad C_1 A R = \left(C_2 \times \frac{1}{R^3} + 1\right) A R$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 1 + \frac{C_2}{R^3}$$

* continuité du flux de chaleur : $q_1\big|_{r=R} = q_2\big|_{r=R}$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}\bigg|_{r=R}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 C_1 A = \lambda_2 \left(C_2 \times \frac{1}{R^3} + 1\right) A - \lambda_2 \frac{3 C_2}{R^4} A R$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 C_1 = \lambda_2 \left(1 - \frac{C_2}{R^3}\right) \Rightarrow C_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(1 - \frac{C_2}{R^3}\right)$$

or $C_1 = 1 + C_2/R^3$

$$\Rightarrow \quad \frac{C_2}{R^3}\left(1 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \Rightarrow C_2 = \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + 2\lambda_2}\right) R^3$$

et $C_1 = 1 + \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + 2\lambda_2} \Rightarrow \quad C_1 = \dfrac{3\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2}$

3 – Finalement, les champs de température dans la sphère et dans le fluide s'écrivent :

$$\begin{cases} T_1(r) = \left(\dfrac{3\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2}\right) A r \\[2ex] T_2(r) = \left[1 + \left(\dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + 2\lambda_2}\right)\left(\dfrac{R}{r}\right)^3\right] A r \end{cases}$$

A la surface de la sphère, on obtient, pour $r = R$:

$$\begin{cases} T_1(R) = \left(\dfrac{3\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2}\right) AR \\ T_2(R) = \left[1 + \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + 2\lambda_2}\right] AR = \left(\dfrac{3\lambda_2}{\lambda_1 + 2\lambda_2}\right) AR \end{cases}$$

c'est à dire $T_2(R) = T_1(R)$ CQFD

si $\lambda_2 = \lambda_1$ (boule et liquide de mêmes propriétés), alors :

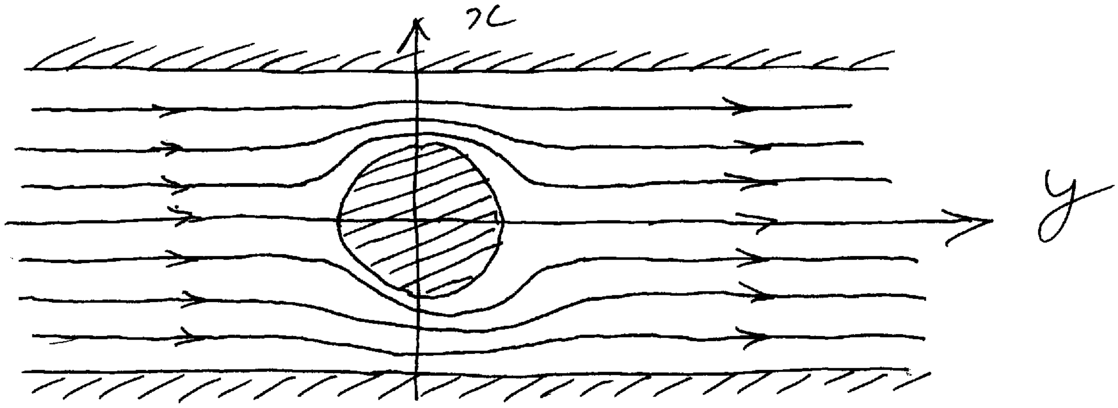
$$T_1(r) = Ar \quad \text{et} \quad T_2(r) = Ar,$$

résultat normal, puisque l'on a affaire à un milieu continu.

4 - Discussion qualitative en présence d'écoulement ; on repart de l'équation de la chaleur "généralisée" (cas d'un écoulement 2D en coordonnées cartésiennes) :

$$\cancel{V_x \frac{\partial T}{\partial x}} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

terme supposé négligeable



$\Delta T \neq 0$, car $\chi \Delta T \sim U \dfrac{\partial T}{\partial y}$ en notant $U \simeq V_y$. Si $T(y) = Ay + C_2 \dfrac{A}{y^2}$

$$\Rightarrow \chi \Delta T \sim UA\left(1 - 2C_2/y^2\right)$$

.../...

soit pour y suffisamment grand

$$\Delta T \sim U A / x$$

Pour $U \to 0$, on retrouve bien $\Delta T = 0$

LICENCE ST mention MECANIQUE

Contrôle n°1 de thermique (MEC 326B)

1. Isolation d'un four (4 points)

Un four est constitué de briques réfractaires de 20 cm d'épaisseur (conductivité λ_b = 1.5 W/(m.K)). Il est recouvert d'un matériau isolant de conductivité λ_i = 0.07 W/(m.K). La température de la paroi interne du four est 1200°C, la température de la paroi externe de l'isolant est 50°C.

Calculer l'épaisseur d'isolant nécessaire pour limiter les pertes thermiques à 1000 W/ m^2. On considère pour simplifier que l'épaisseur d'isolant n'a pas d'influence sur la température extérieure du four.

2. Calorifugeage d'une canalisation (8 points)

Une canalisation cylindrique (diamètre extérieur 4 cm) de température extérieure 90°c traverse l'air ambiant à 20°c (coefficient de convection $h = 4$ W/(m^{2}K)).

a) Calculer le flux thermique perdu par mètre de canalisation.

b) On entoure la canalisation d'un isolant de conductivité λ = 0.2 W/(m.K). Comment sont disposées les résistances thermiques mises en jeu ? Etablir l'existence d'un rayon critique d'isolant. Calculer le flux thermique perdu pour ce rayon critique. Donner une interprétation physique de ce résultat.

c) Calculer la température de la face externe de l'isolant dans le cas précédent (rayon critique d'isolant).

3. Nombre de Nusselt en convection forcée (8 points)

Pour les transferts thermiques par convection, on définit le nombre de Nusselt, N_u comme étant le rapport $N_u = \frac{h\,\ell}{\lambda}$, où h représente la conductance (pour la loi de Newton de la convection), λ la conductivité thermique (pour la loi de Fourier de la conduction), et ℓ une longueur caractéristique. Le nombre de Nusselt peut s'exprimer de façon générale à partir du nombre de Reynolds, R_e et du nombre de Prandtl, P_r, par exemple sous la forme : $N_u = Cte\, R_e^a\, P_r^b$, où a et b sont a priori des puissances arbitraires (fractionnaires ou quelconques).

Université du Maine **4 mars 2008**
UFR Sciences

1- Expliquer, en vous appuyant sur les dimensions de chaque quantité, ce qui justifie que les puissances a et b soient a priori quelconques.

2- Pour une plaque plane, en régime laminaire, $N_u = 0{,}332\, R_e^{1/3}\, P_r^{1/2}$, alors que pour un tube cylindrique en régime turbulent $N_u = 0{,}023\, R_e^{4/5}\, P_r^{2/5}$. Montrer que l'évaluation du rapport de ces deux quantités autour de la transition turbulente $(R_e = 2200)$ est de l'ordre de l'unité (on prendra la valeur du nombre de Prandtl pour l'eau à 20 °C, $P_r = 6{,}87$).

3- Calculer alors ce rapport entre les deux régimes (laminaire d'une part, et turbulent d'autre part), lorsque le nombre de Reynolds turbulent est égal à 10 fois, puis 100 fois le nombre de Reynolds laminaire. Quelle conclusion pouvez-vous tirer sur la meilleure efficacité du transfert thermique par convection forcée en régime turbulent par rapport au cas du régime laminaire, et quelle est la loi de dépendance avec le nombre de Reynolds de cette efficacité ? Quel commentaire pouvez-vous faire de ce résultat ?

Régime laminaire

$$Nu^{lam} = 0,3320\, Re^{1/2}\, Pr^{1/3}$$

Régime turbulent

$$Nu^{tur} = 0,0230\, Re^{4/5}\, Pr^{2/5}$$

337

$$\frac{Nu^{tur}}{Nu^{lam}} = \frac{0,0323}{0,3320} \times \frac{Re^{4/5}\, Pr^{2/5}}{Re^{1/2}\, Pr^{1/3}}$$

$$= \frac{23}{332} \times Re^{\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)} Pr^{\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{23}{332} \times Re^{\left(\frac{8}{10} - \frac{5}{10}\right)} Pr^{\left(\frac{6}{15} - \frac{5}{15}\right)}$$

$$= \frac{23}{332} \times Re^{\frac{3}{10}}\, Pr^{\frac{1}{15}}$$

$$= \frac{23}{332} \times (2200)^{\frac{3}{10}} \cdot (0,707)^{\frac{1}{15}} \simeq 0,681$$

CQFD

$$\simeq 1$$

(2)

· Même calcul pour $Re^{lam} = Re^{tur}/10$

$$\frac{Nu^{tur}}{Nu^{lam}} = X = \frac{0,023}{0,332} \times \frac{\left(Re^{tur}\right)^{4/5} Pr^{2/5}}{\left(Re^{lam}\right)^{1/2} Pr^{1/3}}$$

$$\Rightarrow X = \frac{23}{332} \times (2200)^{3/10} \times (0,707)^{1/15} \times \sqrt{10}$$

$$\underline{\underline{X = 2,15}}$$

<u>Echange deux fois plus "efficace" en régime turbulent qu'en régime "laminaire"</u> cf. remarque bas de la page $\underline{\underline{3}}$

Si $Re^{lam} = Re^{turb}/100$

$$\Rightarrow X = \frac{23}{332} \times (2200)^{3/10} (0,707)^{1/15} \times \sqrt{100}$$

$$= 10 \times 0,681 = \underline{\underline{6,81}}$$

Dépendance en $\sqrt{Re^{tur}/Re^{lam}}$

· Par contre si $R_e^{turb} = 10\, R_e^{lam}$, (3)

résultats sont différents —

$$\frac{Nu^{tur}}{Nu^{lam}} = X = \frac{23}{332} \times (2200)^{\frac{3}{10}} (0{,}707)^{\frac{1}{15}} \times (10)^{\frac{4}{5}}$$

$$X = 6{,}31 \times 0{,}681 = \underline{\underline{4{,}30}}$$

au lieu de 2,15, soit deux fois plus d'augmentation de $\underline{X}$

Pour un ratio de 100, on passe de $0{,}681 \times \sqrt{100}$ à $0{,}681 (100)^{\frac{4}{5}}$

soit de 6,81 à 27,11

Soit une augmentation relative d'efficacité de l'ordre de 4

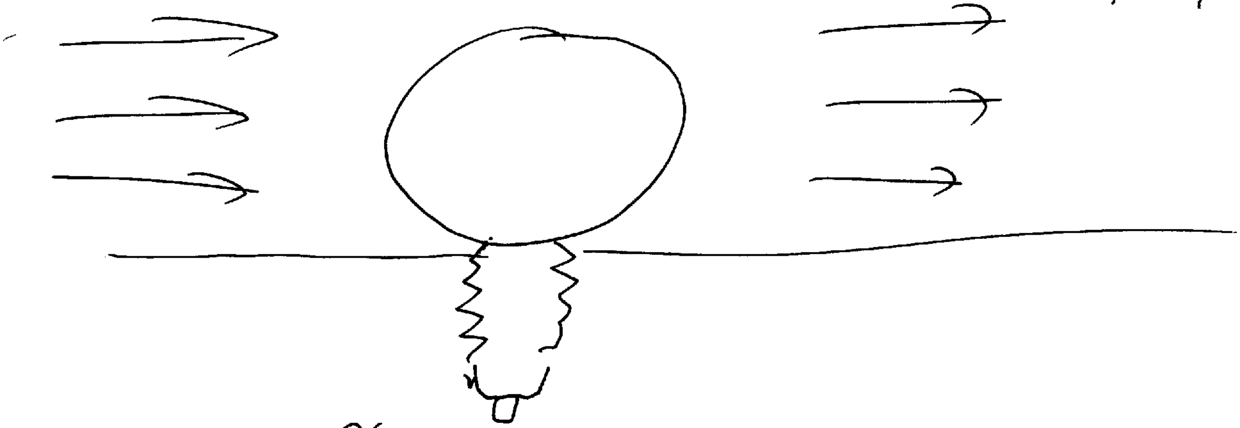
gain autour de la transition

$$\left\{ \frac{(10)^{\frac{4}{5}}}{10^{\frac{1}{2}}} = 10^{\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)} = 10^{\left(\frac{8}{10} - \frac{5}{10}\right)} = 10^{3/10} = 10^{0{,}3} \right.$$

$\underline{\underline{1{,}995}}$

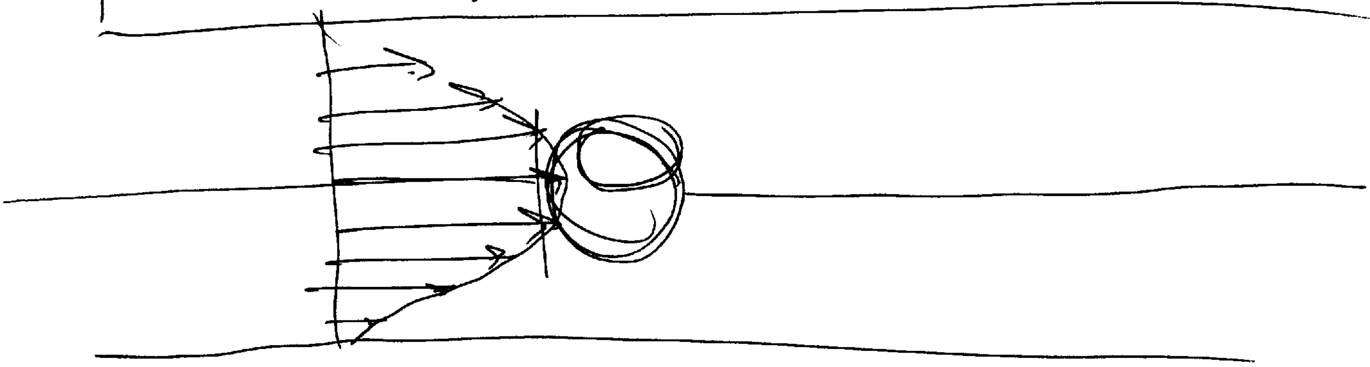
#2

En quoi la connaissance exacte du
1) nombre de Nusselt $Nu = \frac{h\ell}{\lambda}$ où h
est la conductance pour la loi de Newton
de la convection est-il suffisant pour

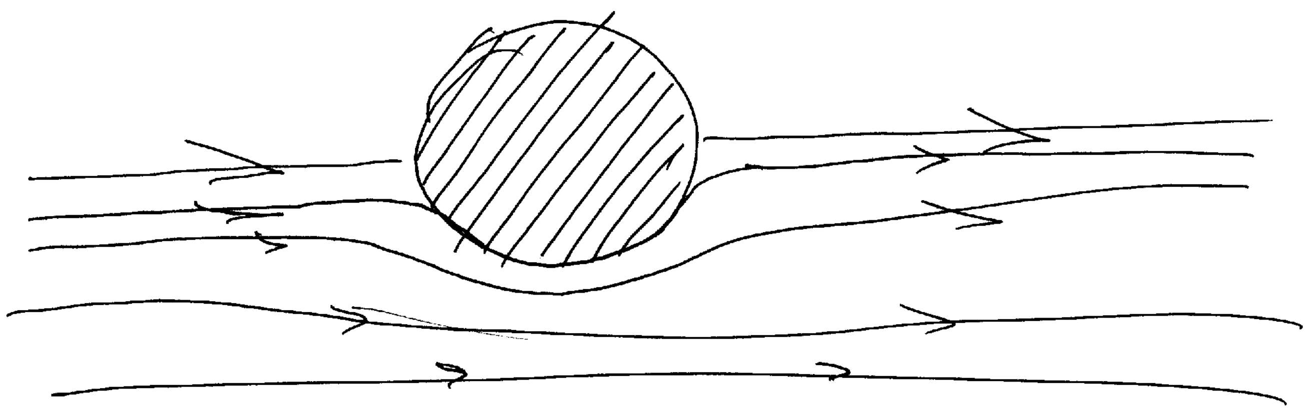


$$1 = \frac{x}{332} \times 9,8330465$$

décrire l'essentiel du phénomène de convection
forcée en régime stationnaire ? Justifier le



fait que Nu est sans unité —



Université du Maine
UFR Sciences et Techniques

Licence ST mention mécanique
2 mai 2007

MEC326B - Transferts thermiques

contrôle continu n°2, 1ère session

Exercice : Convection forcée dans une conduite - Calcul de la longueur critique d'échauffement du fluide caloporteur

On considère le problème de la convection forcée dans une conduite cylindrique, de diamètre d et d'axe orienté le long de Oz. Le fluide de masse volumique ρ, de chaleur massique à pression constante C_p s'écoule le long de z en régime permanent laminaire. On supposera dans tout le problème que les paramètres physiques du fluide sont constants sur la gamme de variation de la température observée. La conductance moyenne, réglant les échanges par convection entre le fluide caloporteur et la paroi solide de la conduite est noté h. Le fluide pénètre dans la conduite à la température T_i et il en ressort, après avoir parcouru la distance L avec une vitesse d'écoulement U, à la température T_o (avec $T_o > T_i$). La paroi de la conduite est maintenue avec un dispositif de chauffage approprié à la température T_s (avec $T_s > T_o > T_i$).

1- Justifier que le bilan thermique simple entre le flux de chaleur apporté par les parois de la conduite, et celui reçu par le fluide, peut s'écrire sous la forme :

$$q = h\,\pi\,d\,L\left(T_S - T_e\right) = \dot{m}\,C_p\left(T_o - T_i\right),$$

avec $T_e = (T_i+T_o)/2$. Exprimer ce que représente la quantité $\dot{m}$ et donner son expression en fonction de ρ, U et d. Calculer alors l'expression de la longueur L permettant d'élever la température du fluide caloporteur de T_i à T_o.

2- Cette expression de L est fournie par la relation suivante : $L = \dfrac{\rho\,U\,d\,C_p}{4\,h}\dfrac{\left(T_o - T_i\right)}{\left(T_S - T_e\right)}$. Montrer à l'aide de l'équation aux dimensions que cette expression correspond bien à celle d'une longueur. Effectuer le calcul de L pour le cas des valeurs moyennes suivantes des paramètres physiques : ρ = 982 kg / m^3 ; U = 0,02 m / s : d = 0,02 m ; C_p = 4,18 kJ / kg °C ; h = 150 W / m^2 °C. $T_i = 60$ °C
$T_o = 80$ °C ; $T_S = 100$ °C

3- La longueur critique L_c pour ce problème est définie comme étant la longueur de la conduite telle que la température de sortie du fluide caloporteur est celle de la paroi chauffée de la conduite ($T_o = T_s$). Montrer que dans le cas, où $T_o = T_s$, on obtient $L_c = 3\,L$ calculé à la question précédente. Discuter alors en détail les trois cas particuliers suivants, à partir de l'expression générale de la longueur L fournie à la question précédente : a) cas où $T_o = T_i$; b) cas où $T_s >> T_o > T_i$; cas où $T_e = T_s$.

1) $$q = h\pi d L (T_s - T_e) = \dot{m} C_p (T_o - T_i)$$

$$\Rightarrow L = \frac{\dot{m} C_p}{h \pi d} \left(\frac{T_o - T_i}{T_s - T_e} \right)$$

avec $\dot{m} = \rho U \frac{\pi}{4} d^2$

$$\Rightarrow L = \frac{\rho U \cancel{\boxed{\pi}} d^{\cancel{2}} C_p}{4 h \cancel{\boxed{\pi}} \cancel{d}} \left(\frac{T_o - T_i}{T_s - T_e} \right)$$

$$\boxed{L = \frac{\rho U d C_p}{4h} \left(\frac{T_o - T_i}{T_s - T_e} \right)}$$

2) $T_i = 60°C$; $T_o = 80°C$; $T_s = 100°C$

$$T_e = \frac{1}{2}(T_i + T_o) = 70°C$$

$$L = \frac{\rho U d C_p}{4h} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \left(\frac{\rho U C_p d}{h} \right)$$

$$L = \frac{1}{6}\left(\frac{\rho U C_p d}{h}\right)$$

$$\frac{\cancel{kg}}{m^3} \; \frac{m}{s} \; \frac{\cancel{kJ}}{\cancel{kg}\,{}^\circ C} \; \frac{m}{kJ} \; \frac{s\,m^2\,{}^\circ C}{}$$

m

avec $\rho = 982\ kg/m^3$

$U = 0{,}02\ m/s$

$d = 0{,}02\ m$

$C_p = 4{,}18\ kJ/kg\ {}^\circ C$

$h = 150\ W/m^2\ {}^\circ C$

$$L = \frac{1}{6}\left(\frac{982\,(0{,}02)^2 \times 4{,}18 \times 10^3}{150}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{982 \times 4 \times 10^{-4} \times 4{,}18 \times 10^3}{150}\right)$$

$$\# \underline{\underline{1{,}5\,m}}$$

3

* $\boxed{T_0 = T_S}$?

$$T_e = \frac{1}{2}(T_i + T_s)$$

$$L = \frac{\rho u d C_p}{4h}\left(\frac{T_s - T_i}{T_s - T_e}\right)$$

$$\frac{T_s - T_i'}{T_s - T_e} = \frac{T_s - T_i'}{T_s - \frac{1}{2}T_i' - \frac{1}{2}T_s} = \frac{T_s - T_i'}{\frac{1}{2}(T_s - T_i')}$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow L = 2 \, \frac{\rho U d C_p}{4h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho U d C_p}{h}\right)$$

au lieu de $\frac{1}{6}\left(\frac{\rho U C_p d}{h}\right)$,

soit une augmentation d'un facteur 3

passant de $L = 1{,}5\,m$ à $L = 4{,}5\,m$

* $\boxed{T_0 = T_i'}$? $\Rightarrow L = \frac{\rho U d C_p}{4h} \times \left(\frac{T_i' - T_i'}{T_s - T_e}\right)$

$\Rightarrow \boxed{L = 0}$ normal, CQFD

* $\boxed{T_s \gg T_0} > T_i'$?

Dans ce cas $\frac{T_0 - T_i'}{T_s - T_e} \rightarrow 0$

$\Rightarrow \boxed{L = 0}$ normal, CQFD

* $\boxed{T_e = T_s}$?

normal OK

Dans ce cas, $L \to \infty$

justifier

OUI

$$T_e = \frac{1}{2}(T_c' + T_0) = T_s$$

$$\Rightarrow \quad T_0 + T_c' = 2T_s$$

$$\Rightarrow \quad T_0 = 2T_s - T_c'$$

$$\Rightarrow \quad T_0 - T_c' = 2T_s - T_c' - T_c'$$

$$= 2(T_s - T_c')$$

* $\boxed{T_0 = T_e}$?

$$\text{Or } T_e = \frac{1}{2}(T_c' + T_0) = T_0$$

$$\Rightarrow \quad T_c' = T_0$$

Université du Maine
UFR Sciences et Techniques

Licence ST mention mécanique
15 juin 2007

MEC326B - Transferts thermiques

contrôle terminal, 2ème session

Exercice : Conduction en régime dépendant du temps (*7 points environ*)

Une bille d'acier de 5cm de diamètre initialement à la température uniforme T_i = 600°C est soudainement placée dans un environnement d'air maintenu à 100°C.

Caractéristiques de l'acier :
Coefficient de conduction : λ = 35 W/(m.K), *chaleur massique :* c = 0.46 kj/(kg.K), *masse volumique :* ρ = 7800 kg/m^3, *coefficient de convection de l'air à la température considérée :* h = 10 W/(m^2.K).

1. Donner la définition du nombre de Biot du système et le calculer. Conclusion ?

2. Faire le bilan énergétique de la bille et en déduire l'équation différentielle régissant l'évolution de sa température.

3. En déduire le temps t_T nécessaire pour que la bille atteigne la température T = 200°C.

4. En intégrant le flux de chaleur perdu par la bille entre t = 0 et t_T, retrouver la quantité de chaleur fournie à l'air ambiant jusqu'à ce que la bille atteigne la température T. Peut-on retrouver ce résultat plus simplement ?

Problème : Convection forcée dans une conduite - Distribution spatiale du champ de température pour le fluide en écoulement (*13 points environ*)

On considère le problème de la convection forcée dans une conduite cylindrique, de rayon R et d'axe orienté le long de Oz. Le fluide de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ, de chaleur massique à pression constante C_p s'écoule le long de z en régime permanent laminaire. On supposera dans tout le problème que les paramètres physiques du fluide sont constants sur la gamme de variation de la température observée.

1- L'écoulement est supposé être du type de Poiseuille, et on écrira en conséquence (sans démonstration ici) l'expression du champ de vitesse pour les particules du fluide sous la forme : $v_z(r) = 2v_m\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, où r représente la coordonnée radiale $(0 < r < R)$. Calculer la valeur moyenne de $v_z(r)$, v_{moy} fournie par l'expression $v_{moy} = \frac{1}{R}\int_0^R v_z(r)\,dr$, et trouver la relation entre v_{moy} et v_m. Quel commentaire vous inspire ce résultat ?

2- On suppose que la paroi de la conduite est chauffée de telle manière que sa température augmente de façon linéaire le long de z, sous la forme $T(z,R) = A\ z$. La distribution de la température dans le fluide est notée $T(z,r) = A\ z + f(r)$, avec $f(R) = 0$, et telle que la fonction $f(r)$ soit exempte de singularité en $r = 0$. Ecrire l'équation de Fourier généralisée à une dimension à partir de la relation générale $\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \chi\,\Delta T$, avec $\chi = \lambda / \rho\, C_P$, et où le laplacien scalaire de T, noté ΔT s'écrit $\Delta T(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$, en utilisant l'expression de $v_z(r)$ de la question 1-. Montrer que l'on obtient finalement pour $f(r)$ l'équation différentielle suivante : $\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + 2\frac{A v_m}{\chi}\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) = 0$.

3- Une solution de cette équation est prise sous la forme : $f(r) = F_0 + B\,r^2 + C\,r^4$. En utilisant les conditions aux limites en $r = 0$ et en $r = R$, cf. question 2-, calculer F_0, B et C et montrer finalement que : $f(r) = F_0\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right]$, avec $F_0 = -\frac{3}{8}\frac{A\,v_m\,R^2}{\chi}$.

4- Vérifier la relation $f(R) = 0$, et discuter ce résultat en relation avec les hypothèses retenues. En calculant $f(R/2)$, ainsi que d'autres valeurs de $f(r)$ pour $0 < r < R$, montrer que $f(r) < 0$. Quelle interprétation physique ce résultat vous inspire ?

5- Calculer la densité de flux de chaleur $q = \lambda \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R}$, avec $T(z,r) = A\ z + f(r)$. Montrer que $q = \frac{1}{2}\rho\, C_P\, A\, v_m\, R$. Ce résultat indique que q est indépendant de la conductivité thermique λ. Quelle interprétation ou commentaire pouvez-vous apporter vis à vis de ce résultat ?

6- Pour un écoulement à faible nombre de Reynolds, on suppose que la prise en compte de la viscosité du fluide μ dans l'équation de Fourier généralisée puisse se mettre sous la forme de l'équation suivante : $\chi\,\Delta T = -\frac{\mu}{\rho\, C_P}\left(\frac{dv}{dr}\right)^2$, avec la vitesse $v(r)$ fournie à la question 1-, ainsi que le laplacien de la température ΔT à la question 2-. Terminer les calculs pour aboutir à la relation suivante : $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -16\frac{\Pr\ v_m^2}{C_P}\frac{r^2}{R^4}$, où $\Pr = \frac{\mu\, C_P}{\lambda}$ représente le nombre de Prandtl.

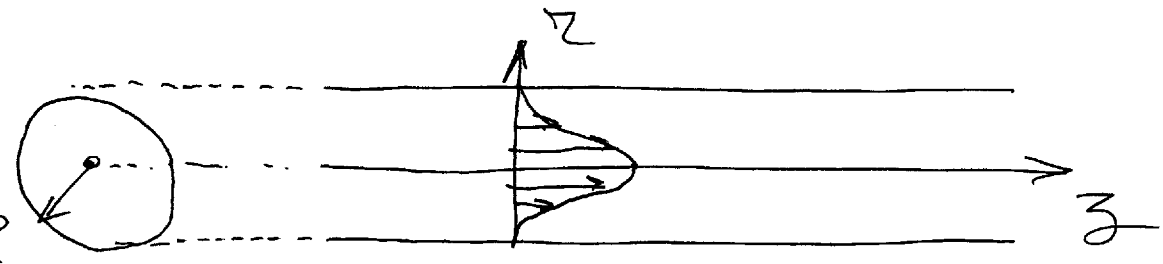
7- Résoudre cette équation suite à deux intégrations successives autour de la variable r, et aboutir à la solution suivante : $T(r) = -\frac{\Pr\ v_m^2}{C_P}\frac{r^4}{R^4} + C_1 \ln r + C_2$. En utilisant les conditions aux limites suivantes $T(r{=}0) = T_0$, et $T(r{=}R) = T_R$, montrer que $C_1 = 0$, puis calculer C_2. Montrer finalement que : $T(r) - T_R = -\frac{\mu\, v_m^2}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right]$.

L3 Mécanique – 2ème session 2007

MEC 326B – Transferts thermiques

Problème : Convection forcée dans une conduite – Distribution spatiale du champ de température pour le fluide en écoulement

1 –



Pour un écoulement du type Poiseuille, le champ de vitesse axial $v_z(r)$ s'écrit sous la forme :

$$v_z(r) = 2\, v_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Dès lors, $v_{moy} = \frac{1}{R}\int_0^R v_z(r)\,dr$ s'écrit :

$$v_{moy} = \frac{2 v_m}{R} \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] dr$$

$$= \frac{2 v_m}{R}\left\{ 1 - \frac{1}{R^2}\int_0^R r^2 dr \right\}$$

$$= \frac{2 v_m}{R}\left\{ 1 - \frac{1}{R^2} \times \frac{R^3}{3}\right\} = \frac{4 v_m}{3}$$

$v_{moy} = \frac{4}{3} v_m$, voisin de v_m.

Tout dépend du coefficient de l'expression de départ $v_z(r) = 2 v_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$.

Si l'on prend $3/2$ au lieu de 2, alors $v_{moy} = v_m$.

2 – Partons de l'équation de Fourier généralisée,

$$\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}\, T = \chi \Delta T,$$

écrite pour le problème 2D considéré :

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} = \chi \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr}\right),$$

car $\Delta T(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)$,

en coordonnées cylindriques, et pour lequel $v_r \ll v_z$, si bien que le terme $v_r \frac{\partial T}{\partial r}$ soit négligeable

$$\Rightarrow v_z \frac{dT}{dz} = \chi \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right).$$

On suppose un écoulement de type Poiseuille (cf. question 1 –)

$$v_z = v = 2 v_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

On suppose de plus que la température de la paroi le long de la conduite suit une loi linéaire d'échauffement, sous la forme :

$$T(z, r) = Az + f(r) \Rightarrow \frac{dT}{dz} = A$$

$$\Rightarrow 2A v_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \chi \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right),$$

avec les conditions aux limites :

$f(r = R) = 0$, car $T(z, R) = Az$,

et absence de singularité pour $r = 0$.

$$\Rightarrow \frac{2A\vartheta_m}{\chi}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{1}{r}\left(r\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{df}{dr}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\frac{2A\vartheta_m}{\chi}\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)=0$$

3 - Recherchons une solution de cette équation différentielle sous la forme

$$f(r) = F_0 + Br^2 + Cr^4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{df(r)}{dr} = 2Br + 4Cr^3 \\ \dfrac{d^2f(r)}{dr^2} = 2B + 12Cr^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2B + 12Cr^2 + 2B + 4Cr^2 = \frac{2A\vartheta_m}{\chi}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$4B + 16Cr^2 = \frac{2A\vartheta_m}{\chi}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

Les conditions aux limites sont les suivantes:

+ Pour $r=0$, $4B = \dfrac{2A\vartheta_m}{\chi} \Rightarrow B = \dfrac{A\vartheta_m}{2\chi}$

+ Pour $r=R$, $4B + 16CR^2 = 0$

$$\Rightarrow C = -\frac{A\vartheta_m}{8\chi R^2} = -\frac{B}{4R^2}$$

De plus, $f=0$ pour $r=R$

$$\Rightarrow 0 = F_0 + BR^2 + CR^4$$

$$\Rightarrow F_0 = -\frac{A\vartheta_m}{2\chi}R^2 + \frac{A\vartheta_m}{8\chi}R^2$$

$$F_0 = -\frac{3A\vartheta_m R^2}{8\chi}$$

4 – Finalement, avec ces hypothèses, la fonction $f(r)$ prend la forme suivante :

$$f(r) = F_0 \left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^4 \right],$$

avec $F_0 = - \dfrac{3 A v_m R^2}{8 \chi} < 0$

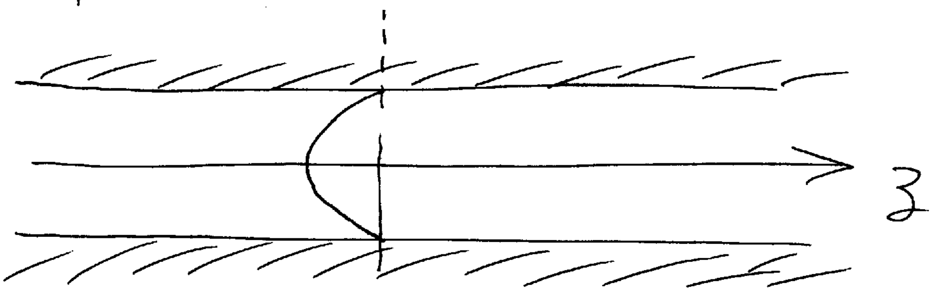
Pour $r = R$, $f(r=R) = 0$

Pour $r = 0$, $f(r=0) = F_0 < 0$

Pour $r = \frac{R}{2}$, $f(r=\frac{R}{2}) = F_0 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{16}\right) \right]$

$$\# \ \frac{2}{3} F_0 < 0$$

En fait, $\forall r$, on peut montrer que $f(r) < 0$, sauf pour $r = R$ pour lequel $f(R) = 0$



profil de $f(r)$ toujours < 0

Ce résultat est normal à observer, car si le long de z sur la paroi de la conduite la température augmente $T(z, R) = A z$, une dépendance similaire existe à l'intérieur de la conduite le long de l'écoulement, $T(z, r) = A z + f(r)$, mais au centre de la veine l'équilibrage en température tarde à se produire, d'où $f(r) < 0$, $\forall r \neq R$.

5 - Au final, $f(r)$ peut s'écrire :

$$f(r) = -\frac{A v_m R^2}{2\chi}\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right]$$

Effectuons le calcul de la densité du flux de chaleur,

$$q = \lambda \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R}$$, en prenant

$$T(z,r) = Az + f(r) = Az - \frac{A v_m R^2}{\chi}\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{A v_m R^2}{2\chi}\left[\frac{2r}{R^2} - \frac{r^3}{R^4}\right] = \frac{A v_m r}{2\chi}\left(2 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = \frac{A v_m R}{2\chi}(2-1) = \frac{A v_m R}{2\chi}$$

$$\Rightarrow q = \lambda \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R} = \frac{1}{2}\rho c_p A v_m R,$$

car $\chi = \lambda/\rho c_p$, quantité q indépendante de la conductivité thermique λ.

6 - On suppose dorénavant que l'on puisse prendre en compte l'influence de la viscosité pour un écoulement à faible nombre de Reynolds en écrivant l'équation de Fourier généralisée sous la forme :

$$\chi \Delta T = -\frac{\nu}{c_p}\left(\frac{dv}{dr}\right)^2,$$

avec $v(r) = 2 v_m\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$

$$\Rightarrow \chi \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{\nu}{C_p}\left(\frac{4 v_m r}{R^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{16 v_m^2 \nu}{R^4 \chi C_p} r^2 ,$$

Soit en notant le nombre de Prandtl P, $P = \nu/\chi$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -16\frac{P v_m^2}{C_p}\left(\frac{r^2}{R^4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -16\frac{P v_m^2}{C_p}\left(\frac{r^3}{R^4}\right)$$

$$\Rightarrow r\frac{dT}{dr} = -16\frac{P v_m^2}{C_p} \times \frac{r^4}{4R^4} + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = -16\frac{P v_m^2}{C_p} \times \frac{r^3}{4R^4} + \frac{C_1}{r}$$

$$\Rightarrow T(r) = -16\frac{P v_m^2}{C_p} \times \frac{r^4}{16R^4} + C_1 \ln r + C_2$$

Conditions aux limites :

* Pour $r=0$, $T(r=0)$ est fini $\Rightarrow C_1 = 0$
* Pour $r=R \Rightarrow T(r=R) = T_R = -\frac{P v_m^2}{C_p} + C_2$

$$\Rightarrow T(r) = T_R + \frac{P v_m^2}{C_p}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right),$$

soit avec $P = \nu/\chi$

$$\Rightarrow T(r) - T_R = \frac{v_m^2 \nu}{\chi C_p}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right)$$

Université du Maine Licence ST mention mécanique
UFR Sciences et Techniques 28 juin 2005

MEC326B contrôle continu 2ème session

On considère un barreau cylindrique d'axe orienté le long de Oz, de longueur L et de section S, de conductivité thermique λ. Ce barreau est en contact à ses extrémités sur deux plaques très épaisses maintenues aux températures T_1 (en $z = 0$) et T_2 (en $z = +L$). Il est entouré par un fluide de température T_∞ qui échange avec le barreau de la chaleur par convection (loi de Newton, conductance h).

1- Reprendre les calculs réalisés en cours, pour établir le bilan énergétique prenant en compte d'une part la loi de Fourier de la conduction, et la loi de Newton de la convection. On suppose qu'il n'existe aucune source de chaleur au sein du barreau. Montrer alors que le champ de température réduit $\theta(z)$ s'écrit sous la forme :

$$\theta(z) = T(z) - T_\infty = C_1 \exp(-mz) + C_2 \exp(+mz) \ .$$

Quelle est la signification de la constante m dans cette expression ? Quelle forme prend-elle pour un barreau de section cylindrique de rayon r ?

2- On suppose que $T_{(z=+L)} = T_1$. Ecrire les deux conditions aux limites pour θ (en $z = 0$ et en $z = +L$). Calculer les deux constantes C_1 et C_2. Montrer alors que le champ de température général prend la forme suivante :

$$\theta(z) = \frac{\theta_1}{2\, sh\, mL}\left\{ \Big(1 - \exp(-mL)\Big)\exp(+mz) - \Big(1 - \exp(+mL)\Big)\exp(-mz) \right\} .$$

Vérifier que cette expression permet bien de retrouver les conditions aux limites de départ $\theta_{(z=0)} = \theta_1$; $\theta_{(z=+L)} = \theta_1$. Calculer alors la température au milieu du barreau, montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $\theta_{(z=L/2)} = 2\,\theta_1 \dfrac{sh\, mL/2}{sh\, mL}$. Montrer alors, en vous appuyant sur l'allure de la fonction sinus hyperbolique (sh), que cette valeur est forcément inférieure à θ_1.

3- On suppose dorénavant que $T_{(z=+L)} = T_\infty$. Ecrire les deux conditions aux limites pour θ (en $z = 0$ et en $z = +L$). Calculer les deux constantes C_1 et C_2. Montrer alors que le champ de température général prend la forme suivante :

$$\theta(z) = \theta_1 \left\{ \frac{\exp(-mz)}{1 - \exp(-2mL)} + \frac{\exp(+mz)}{1 - \exp(+2mL)} \right\} .$$

Vérifier que cette expression permet bien de retrouver les conditions aux limites de départ $\theta_{(z=0)} = \theta_1$; $\theta_{(z=+L)} = \theta_\infty$. Calculer alors la température au milieu du barreau, montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $\theta_{(z=L/2)} = \theta_1 \left\{ \dfrac{ch\,(mL/2) - ch\,(3mL/2)}{1 - ch\,(2mL)} \right\}$. Montrer alors, en vous appuyant sur l'allure de la fonction cosinus hyperbolique (ch), que cette valeur est forcément inférieure à θ_1.

4- On suppose dorénavant que $T_{(z=+L)} = T_2$. Écrire les deux conditions aux limites pour θ (en $z = 0$ et en $z = +L$). Calculer les deux constantes C_1 et C_2. Montrer alors que le champ de température général prend la forme suivante :

$$\theta(z) = \frac{1}{2\,sh\,mL}\left\{ \left(\theta_1 \exp(+mL) - \theta_2\right) \exp(-mz) - \left(\theta_1 \exp(-mL) - \theta_2\right) \exp(+mz) \right\}$$

5- Vérifier que cette expression permet bien de retrouver les conditions aux limites de départ $\theta_{(z=0)} = \theta_1$; $\theta_{(z=+L)} = \theta_2$. Calculer alors la température au milieu du barreau, montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $\theta_{(z=L/2)} = \left(\theta_1 - \theta_2\right) \dfrac{sh\,(mL/2)}{sh\,(mL)}$. Montrer alors, en vous appuyant sur l'allure de la fonction sinus hyperbolique (sh), que cette valeur est forcément inférieure à $(\theta_1 - \theta_2)/2$.

6- Calculer pour cette configuration la quantité de chaleur échangée par effet de convection : $Q = \int_0^L d\,q(z) = \int_0^L h\,P\,\theta\,dz$. Montrer que cette quantité de chaleur totale échangée s'écrit finalement (après intégration et réarrangement) sous la forme :

$$Q = \frac{h\,P\left(\theta_1 + \theta_2\right)}{m}\,th\,\frac{mL}{2}\,.$$

7- Effectuer le développement de la tangente hyperbolique (th) autour de zéro $(th\,x \approx x)$ et montrer que la quantité de chaleur totale échangée peut se mettre sous la forme : $Q = h\,S\,\theta_{moy}$, avec S = P L, et $\theta_{moy} = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. Proposer une interprétation physique de ce résultat.

8- On considère dorénavant le cas d'une poutre conique de longueur L, de section variable $S(z)$ variable le long de l'axe z, d'expression $S(z) = S_0\left(1 - \frac{z}{L}\right)$, où S_0 représente la section de la poutre en $z = 0$ (la section étant supposée nulle pour $z = +L$). Écrire la loi de conservation de la chaleur (cf. question 1-), et établir la relation différentielle de variation de la section sous la forme $S(z+dz) = S(z) - \dfrac{S_0}{L}\,dz$

9- Montrer alors que l'équation de la chaleur peut se mettre sous la forme de l'équation différentielle suivante : $\dfrac{d^2\theta}{dz^2} - m^2\theta = \dfrac{1}{L}\dfrac{d\theta}{dz}$.

10 - Montrer qu'une solution de cette équation différentielle peut s'écrire sous la forme :

$$\theta(z) = C_1 \exp\left(\frac{1}{2L} - \sqrt{\frac{1}{4L^2} + m^2}\right) z + C_2 \exp\left(\frac{1}{2L} + \sqrt{\frac{1}{4L^2} + m^2}\right) z\,.$$

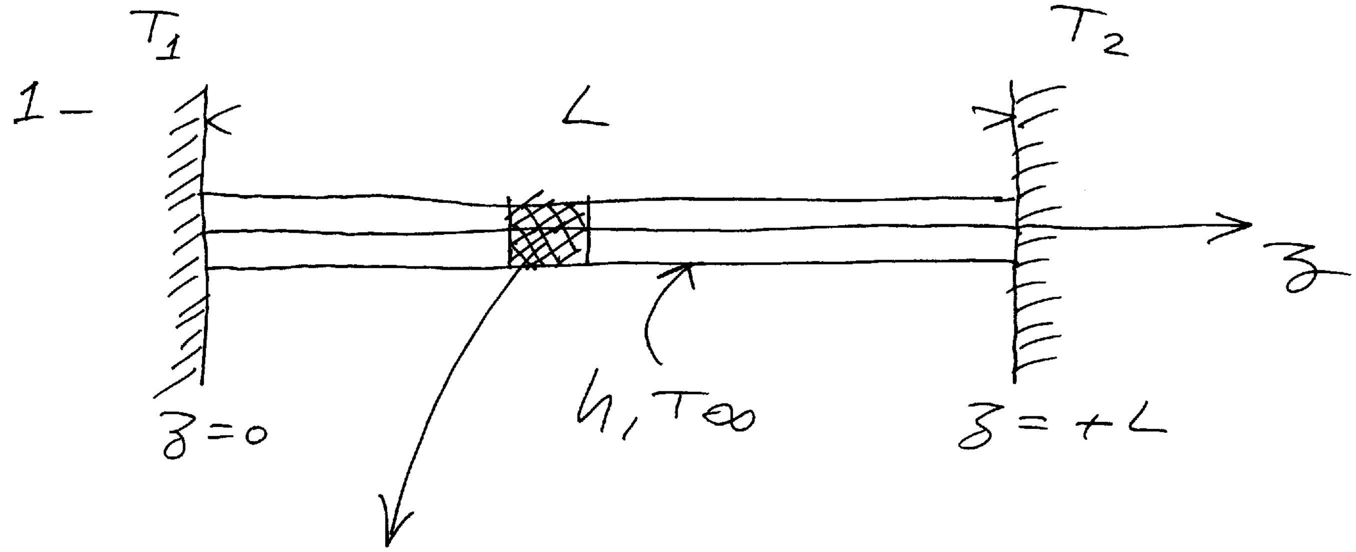
Écrire alors les conditions aux limites en $z = 0$ et en $z = +L$. Discuter le cas limite du barreau de section uniforme. Sachant qu'il suffit de considérer pour ce cas la limite $L \to \infty$, montrer que l'on retrouve aisément la solution de la question 1- pour le champ de chaleur, à savoir $\theta(z) = C_1 \exp(-mz) + C_2 \exp(+mz)$.

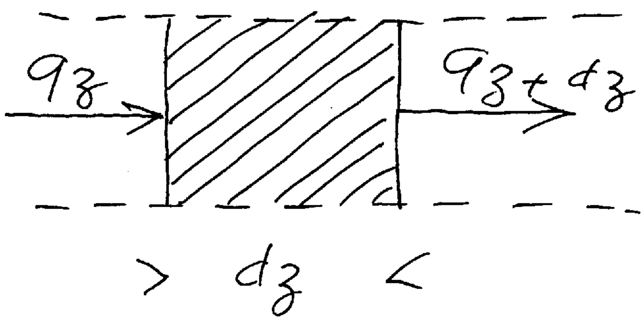
Licence ST mention Mécanique

MEC 326B Thermique 2ème session

Juin 2005

1 -





Conservation de l'énergie thermique

$$-\lambda S \frac{dT(z)}{dz} = -\lambda S \frac{dT(z+dz)}{dz} + hP\,dz\,(T - T_\infty),$$

avec P : périmètre du tube

$$\Rightarrow -\lambda S \frac{dT}{dz} = -\lambda \left(\frac{dT}{dz} + \frac{d^2T}{dz^2} dz\right) S + hP\,dz\,(T - T_\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dz^2} - \frac{hP}{\lambda S}(T - T_\infty) = 0$$

Soit en posant $\theta(x) = T(x) - T_\infty$,
et en notant $m^2 = \frac{hP}{\lambda S} > 0$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dz^2} - m^2\theta = 0,$$

de solution générale :

$$\theta(z) = C_1 e^{-mz} + C_2 e^{+mz}$$

Pour le cas d'un tube cylindrique :

$$m^2 = \frac{hP}{\lambda S} = \frac{h \times 2\pi r}{\lambda \times \pi r^2} = \frac{2h}{\lambda r}$$

2 – Utilisation des conditions aux limites :

$T(x = +L) = T_1$ et $T(x=0) = T_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = T_1 - T_\infty = C_1 + C_2 & (1) \\ \theta_1 = T_1 - T_\infty = C_1 e^{-mL} + C_2 e^{+mL} & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 + C_2 = C_1 e^{-mL} + C_2 e^{+mL}$$

$$\Rightarrow C_2 = -C_1 \left(\frac{1 - e^{-mL}}{1 - e^{+mL}}\right)$$

$$(1) \times e^{-mL} - (2) \Rightarrow \theta_1 (e^{-mL} - 1) = C_2 (e^{-mL} - e^{mL})$$

$$\Rightarrow C_2 = \theta_1 \frac{(1 - e^{-mL})}{2\,\mathrm{sh}\, mL}$$

et $C_1 = -\theta_1 \frac{(1 - e^{mL})}{2\,\mathrm{sh}\, mL}$

D'où au final :

$$\theta(x) = \frac{\theta_1}{2\,\mathrm{sh}\, mL} \left\{ (1 - e^{-mL}) e^{mz} - (1 - e^{mL}) e^{-mz} \right\}$$

validation des conditions aux limites

…/…

Pour $z = 0 \Rightarrow \theta(z=0) = \theta_1$

$$\theta(z=0) = \frac{\theta_1}{2\,\text{sh}\,mL}\left\{(1-e^{-mL}) - (1-e^{mL})\right\}$$

$$= \frac{\theta_1}{2\,\text{sh}\,mL}\left(e^{mL} - e^{-mL}\right) = \theta_1$$

Pour $z = +L \Rightarrow \theta(z=+L) = \theta_1$

$$\theta(x=+L) = \frac{\theta_1}{2\,\text{sh}\,mL}\left\{(1-e^{-mL})e^{mL} - (1-e^{mL})e^{-mL}\right\}$$

$$= \frac{\theta_1}{2\,\text{sh}\,mL}\left(e^{mL} - e^{-mL}\right) = \theta_1$$

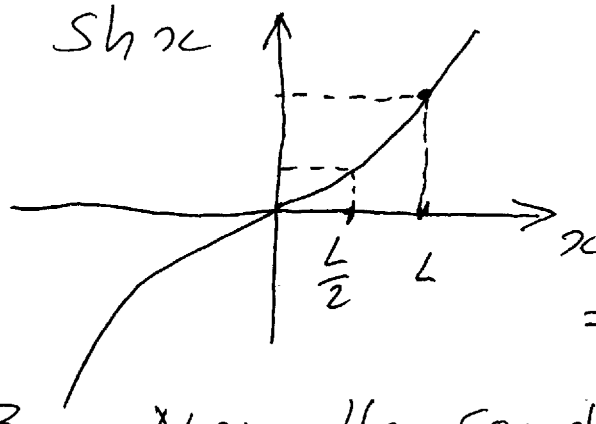
CQFD

La valeur minimale de $T(z)$ est obtenue au milieu de la barre (en $z = +\frac{L}{2}$)

$$\theta(z=\tfrac{L}{2}) = \frac{\theta_1}{2\,\text{sh}\,mL}\left\{(1-e^{-mL})e^{m\frac{L}{2}} - (1-e^{mL})e^{-m\frac{L}{2}}\right\}$$

$$= \frac{\theta_1}{2\,\text{sh}\,mL}\left(e^{mL/2} - e^{-mL/2}\right)$$

$$\Rightarrow \theta(z=\tfrac{L}{2}) = 2\theta_1 \frac{\text{sh}\,m\,L/2}{\text{sh}\,mL}$$



fonction $\text{sh}\,x$

$\text{sh}\,mL > 2\,\text{sh}\,m\frac{L}{2}$

$$\Rightarrow \theta(z=\tfrac{L}{2}) < \theta_1$$

3 – Nouvelle condition aux limites en

$x = +L$, $T(z=L) = T_\infty$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = T_1 - T_\infty = C_1 + C_2 \\ \theta_2 = 0 = T_\infty - T_\infty = C_1 e^{-mL} + C_2 e^{mL} \end{cases}$$

$$C_2 = -C_1 e^{-2mL}$$
$$\Rightarrow \theta_1 = C_1(1-e^{-2mL})$$
$$\Rightarrow C_1 = \frac{\theta_1}{1-e^{-2mL}} \; ; \; C_2 = \frac{\theta_1}{1-e^{2mL}}$$

D'où :

$$\theta(x) = \theta_1 \left\{ \frac{e^{-mz}}{1-e^{-2mL}} + \frac{e^{mz}}{1-e^{2mL}} \right\}$$

vérification des conditions aux limites :

$$z=0 \Rightarrow \theta(z=0) = \theta_0 = \theta_1$$

$$\theta_0 = \theta_1 \left\{ \frac{1}{1-e^{-2mL}} + \frac{1}{1-e^{2mL}} \right\}$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \theta_1 \left\{ \frac{1-e^{2mL}+1-e^{-2mL}}{1-e^{2mL}-e^{-2mL}+e^{2mL}e^{-2mL}} \right\}$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \theta_1 \quad \text{CQFD}$$

De même en $z = +L$:

$$\theta(z=+L) = \theta_1 \left\{ \frac{e^{-mL}}{1-e^{-2mL}} + \frac{e^{mL}}{1-e^{2mL}} \right\} = 0$$

CQFD

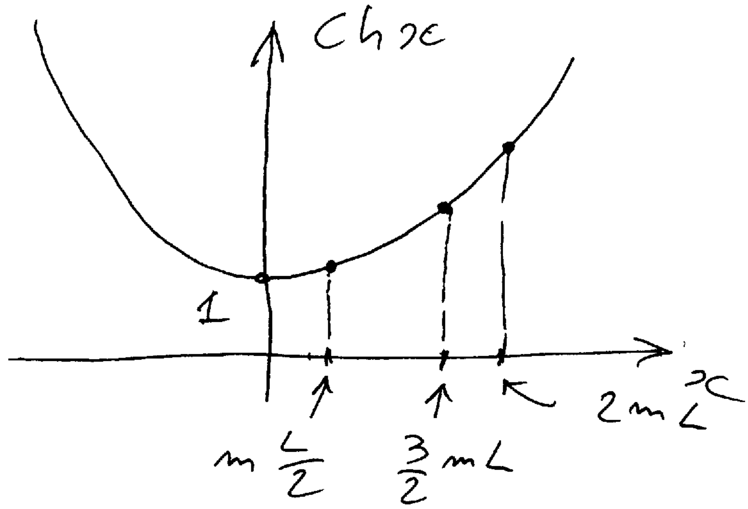
De plus, la température en $x = +\frac{L}{2}$ doit être intermédiaire entre 0 et θ_1.

$$\theta\left(z=\frac{L}{2}\right) = \theta_1 \left\{ \frac{e^{-m\frac{L}{2}}}{1-e^{-2mL}} + \frac{e^{m\frac{L}{2}}}{1-e^{2mL}} \right\}$$

$$\theta\left(z=\frac{L}{2}\right) = \theta_1 \left\{ \frac{e^{-m\frac{L}{2}} - e^{\frac{3}{2}mL} + e^{m\frac{L}{2}} - e^{-\frac{3}{2}mL}}{2-2\,\mathrm{ch}\,2mL} \right\}$$

$$\theta\left(z=\frac{L}{2}\right) = \theta_1 \underbrace{\left\{ \frac{\mathrm{ch}\,m\frac{L}{2} - \mathrm{ch}\,\frac{3}{2}mL}{\mathrm{ch}\,0 - \mathrm{ch}\,2mL} \right\}}_{<1} < \theta_1$$

$\theta\left(x=\frac{L}{2}\right) < \theta_1$ (cf. tracé de la fonction $\operatorname{ch} x$)



CQFD

$$\left(\operatorname{ch} m\frac{L}{2} - \operatorname{ch}\frac{3}{2}mL\right) < 1 - \operatorname{ch} 2mL$$

4 - On suppose que dorénavant la température à l'extrémité située en $z = L$ est T_2. Les nouvelles conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \theta_1 = C_1 + C_2 \\ \theta_2 = C_1 e^{-mL} + C_2 e^{mL} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_2 = \theta_1 - C_1 \Rightarrow \theta_2 = C_1 e^{-mL} + \theta_1 e^{mL} - C_1 e^{mL}$$

$$\Rightarrow \theta_2 - \theta_1 e^{mL} = C_1\left(e^{-mL} - e^{mL}\right)$$

D'où :

$$C_1 = \frac{\theta_1 e^{mL} - \theta_2}{2 \operatorname{sh} mL} ; \quad C_2 = -\frac{\theta_1 e^{-mL} - \theta_2}{2 \operatorname{sh} mL}$$

$$\Rightarrow \theta(z) = \frac{1}{2 \operatorname{sh} mL}\left\{\left(\theta_1 e^{mL} - \theta_2\right)e^{-mz} - \left(\theta_1 e^{-mL} - \theta_2\right)e^{mz}\right\}$$

5 - Vérification des conditions aux limites :

$$\theta(0) = \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2 \operatorname{sh} mL}\begin{pmatrix} \theta_1 e^{mL} - \theta_2 \\ - \theta_1 e^{-mL} + \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \theta_1 \quad \text{CQFD}$$

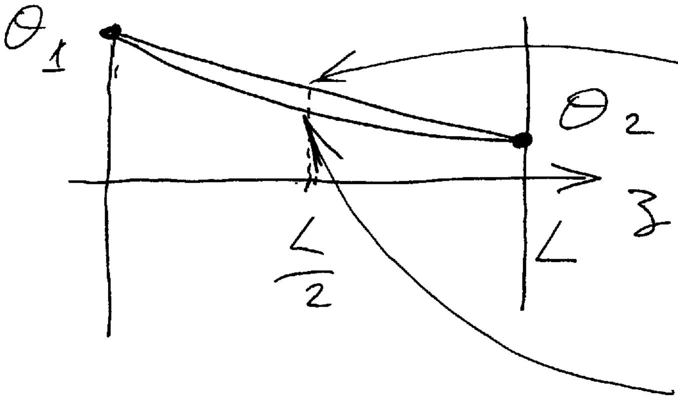
$$\theta(+L)=\theta_2 \Rightarrow \theta_2=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,mL}\begin{pmatrix}\theta_1-\theta_2 e^{-mL}\\ -\theta_1+\theta_2 e^{mL}\end{pmatrix}$$

$$=\theta_2 \quad \text{CQFD}$$

$$\theta\left(\tfrac{L}{2}\right)=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,mL}\left\{(\theta_1 e^{mL}-\theta_2)e^{-m\frac{L}{2}} - (\theta_1 e^{-mL}-\theta_2)e^{m\frac{L}{2}}\right\}$$

$$\theta\left(\tfrac{L}{2}\right)=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,mL}\left\{\theta_1 e^{m\frac{L}{2}}-\theta_2 e^{-m\frac{L}{2}}-\theta_1 e^{-m\frac{L}{2}}+\theta_2 e^{m\frac{L}{2}}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \theta\left(z=\tfrac{L}{2}\right)=(\theta_1+\theta_2)\,\frac{\mathrm{sh}\,m\,L/2}{\mathrm{sh}\,mL}$$



Du fait que $\mathrm{sh}\,mL > 2\,\mathrm{sh}\,m\frac{L}{2}$

$$\theta\left(\tfrac{L}{2}\right) < \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

6 – On repart du champ scalaire de température exprimé par sa relation générale :

$$\theta(z)=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,mL}\left\{(\theta_1 e^{mL}-\theta_2)e^{-mz}-(\theta_1 e^{-mL}-\theta_2)e^{mz}\right\}$$

Soit pour le calcul de la quantité de chaleur accumulée :

$$dq(z)=h\,P\,\theta(z)\,dz$$

$$Q=\int_0^L \frac{hP}{2\,\mathrm{sh}\,mL}\left\{(\theta_1 e^{mL}-\theta_2)e^{-mz}-(\theta_1 e^{-mL}-\theta_2)e^{mz}\right\}dz$$

$$Q=\frac{hP}{2\,\mathrm{sh}\,mL}\left\{(\theta_1 e^{mL}-\theta_2)\int_0^L e^{-mz}dz-(\theta_1 e^{-mL}-\theta_2)\int_0^L e^{mz}dz\right\}$$

$$Q=\frac{hP}{2\,\mathrm{sh}\,mL}\left\{(\theta_1 e^{mL}-\theta_2)\left(-\frac{1}{m}\right)(e^{-mL}-1)-(\theta_1 e^{-mL}-\theta_2)\left(\frac{1}{m}\right)(e^{mL}-1)\right\}$$

$$Q = \frac{hP}{2m\,\mathrm{sh}\,mL}\left\{2\theta_1\,\mathrm{ch}\,mL - 2\theta_2 - 2\theta_1 + 2\theta_2\,\mathrm{ch}\,mL\right\}$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{hP}{m\,\mathrm{sh}\,mL}(\theta_1+\theta_2)(\mathrm{ch}\,mL - 1)$$

Or $\mathrm{ch}\,mL - 1 = 2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{mL}{2}$

et $\mathrm{sh}\,mL = 2\,\mathrm{sh}\,\frac{mL}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{mL}{2}$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{hP(\theta_1+\theta_2)}{m}\tanh\frac{mL}{2}$$

7- Au voisinage de 0 ($mL \to 0$)

$$Q \simeq \frac{hP(\theta_1+\theta_2)}{m} \times \frac{mL}{2} = \frac{hPL(\theta_1+\theta_2)}{2}$$

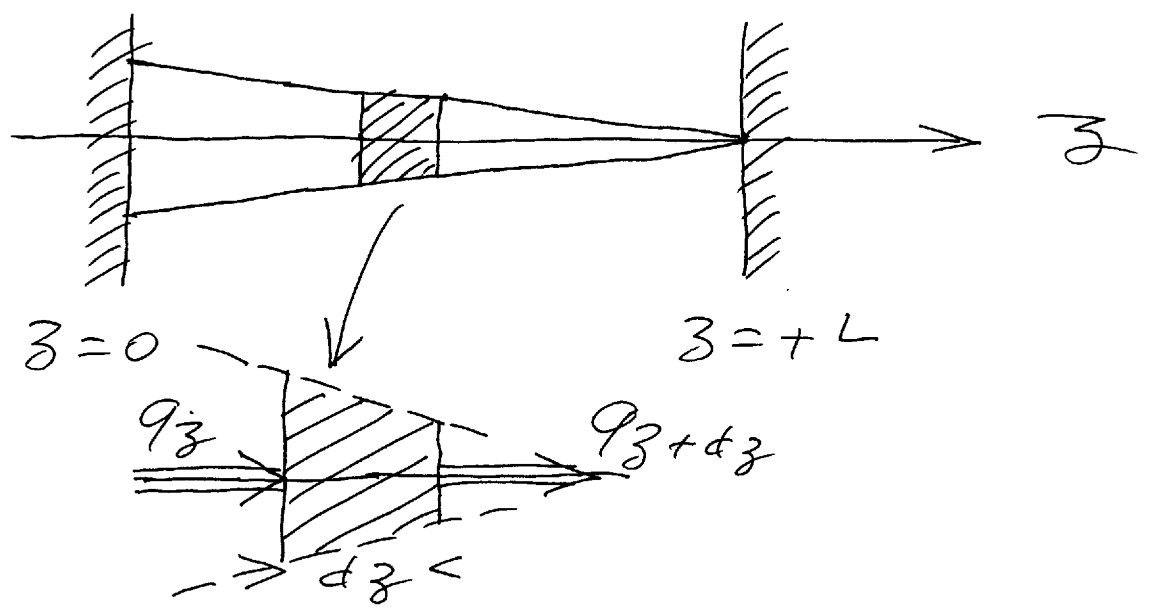
$$Q \simeq hS\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right), \text{ car } S = P \times L$$

On peut faire l'interprétation d'un flux de chaleur du type

$$Q = hS\,\theta_{moy} = hS(T_{moy} - T_\infty),$$

avec $\theta_{moy} = \frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$ CQFD

8- Soit un barreau de section conique (cf- figure ci-dessous)



$$\begin{cases} \text{en } z = 0, & S(0) = S_0 \\ \text{en } z = +L, & S(L) = 0 \\ \text{en } z = z, & S(z) = S_0\left(1 - \frac{z}{L}\right) \end{cases}$$

On repart de l'équation de la chaleur traduisant le bilan des échanges thermiques :

$$-\lambda S_z \frac{dT(z)}{dz} = -\lambda S_{z+dz} \frac{dT(z+dz)}{dz} + h P dz (T - T_\infty),$$

avec $S_z = S_0 (1 - z/L)$ et S_{z+dz}

$$S_{z+dz} = S_0\left(1 - \frac{z+dz}{L}\right) = S_0\left(1 - \frac{z}{L} - \frac{dz}{L}\right)$$

$$\Rightarrow S_{z+dz} = S_z - S_0 \frac{dz}{L} = S_z + \frac{\partial S}{\partial z} dz,$$

car $\frac{\partial S}{\partial z} = -\frac{S_0}{L}$

9 – Etablissons l'équation différentielle traduisant les échanges thermiques :

$$-\lambda S_0\left(1 - \frac{z}{L}\right)\frac{dT}{dz} = -\lambda S_0\left(1 - \frac{z}{L} - \frac{dz}{L}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{dT}{dz} + \frac{d^2T}{dz^2} dz\right) + h P_z dz (T - T_\infty)$$

$$\Rightarrow 0 = -\lambda S_0 \frac{d^2T}{dz^2} + \frac{\lambda S_0}{L} \frac{dT}{dz} + h P_z (T - T_\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dz^2} - \frac{h P_z}{\lambda S_0}(T - T_\infty) = \left(\frac{1}{L}\right)\frac{dT}{dz},$$

soit $\frac{d^2\theta}{dz^2} - m^2\theta = \frac{1}{L}\frac{d\theta}{dz}$, de solution

$$\theta(z) = C_1(z) e^{-mz} + C_2(z) e^{mz}$$

10- Dans cette solution, $C_1(z)$ et $C_2(z)$ sont des fonctions lentement variables de la coordonnée z

$$\theta(z) = C_1(z)e^{-mz} + C_2(z)e^{mz}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dz} = -m\,C_1(z)e^{-mz} + m\,C_2(z)e^{mz} + e^{-mz}\frac{dC_1(z)}{dz} + e^{mz}\frac{dC_2(z)}{dz}$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = m^2 C_1(z)e^{-mz} + m^2 C_2(z)e^{mz} - 2m\,e^{-mz}\frac{dC_1(z)}{dz} + 2m\,e^{mz}\frac{dC_2(z)}{dz} + e^{-mz}\frac{d^2C_1(z)}{dz^2} + e^{mz}\frac{d^2C_2(z)}{dz^2}$$

Les deux derniers termes sont négligeables, car justement $C_1(z)$ et $C_2(z)$ sont des fonctions lentement variable de la coordonnée z.

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dz^2} = m^2\theta(z) - 2m\left(e^{-mz}\frac{dC_1(z)}{dz} + e^{mz}\frac{dC_2(z)}{dz}\right)$$

$$\Rightarrow -2m\left(e^{-mz}\frac{dC_1(z)}{dz} + e^{mz}\frac{dC_2(z)}{dz}\right) = \frac{1}{L}\left(e^{-mz}\frac{dC_1(z)}{dz} + e^{mz}\frac{dC_2(z)}{dz}\right) + \frac{m}{L}\left(C_2(z)e^{mz} - C_1(z)e^{-mz}\right)$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \frac{1}{L}\frac{d\theta}{dz} - m^2\theta = 0$$

$$\theta_{,zz} - \frac{1}{L}\theta_{,z} - m^2\theta = 0$$

$\Delta' = \frac{1}{4L^2} + m^2 > 0$, d'où la solution

$$\Theta(z) = C_1 e^{\left(\frac{1}{2L}+\sqrt{\frac{1}{4L^2}+m^2}\right)z} + C_2 e^{\left(\frac{1}{2L}-\sqrt{\frac{1}{4L^2}+m^2}\right)z}$$

Conditions aux limites :

en $z = 0 \Rightarrow \Theta(0) = \Theta_1$; en $z = L \Rightarrow \Theta(L) = \Theta_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Theta_1 = C_1 + C_2 \\ \Theta_2 = C_1 e^{\left(\frac{1}{2L}+\sqrt{\frac{1}{4L^2}+m^2}\right)L} + C_2 e^{\left(\frac{1}{2L}-\sqrt{\frac{1}{4L^2}+m^2}\, L\right)} \end{cases}$$

Cas limite du barreau de section uniforme.

Il suffit de prendre $L \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \Theta(z) = C_1 e^{-mz} + C_2 e^{+mz} \quad \text{CQFD}$$

Université du Maine
UFR Sciences

17 mai 2005

LICENCE SCIENCES et TECHNOLOGIE
mention "MECANIQUE"

Contrôle de thermique (MEC 326B)

1. Question de cours

Développer l'analogie entre résistance thermique et résistance électrique.
Quelle est la résistance thermique de deux plaques placées a) en série b) en parallèle ?

2. Régime variable

Une bille d'acier de 5 cm de diamètre initialement à la température uniforme T_i = 450° C est soudainement placée dans un environnement d'air maintenu à 100°C.
Caractéristiques de l'acier : Coefficient de conduction : λ = 35 W/mK, chaleur massique : c = 0.46 kJ/kgK, masse volumique : ρ = 7800 kg/m^3.
Coefficient de convection de l'air à la température considérée : h = 10 W/m^{2}K

2.1. Donner la définition du nombre de Biot et le calculer. Conclusion ?

2.2. Faire un bilan énergétique de la bille et en déduire l'équation différentielle régissant l'évolution de sa température.

2.3 En déduire le temps nécessaire pour que la bille atteigne la température T = 150°C

2.4 En intégrant le flux de chaleur perdu entre $t = 0$ et t, retrouver la quantité de chaleur fournie à l'air ambiant jusqu'à ce que la bille atteigne la température $T(t)$.

1) Electrocinétique : $\Delta U = R_{el} I$

U : potentiel electrique
I : intensité " $\rightarrow$ R_{el} résistance electrique.

Thermique : $\Delta T = R_{th} \phi$

T : température
ϕ : flux thermique $\rightarrow$ R_{th} résistance thermique.

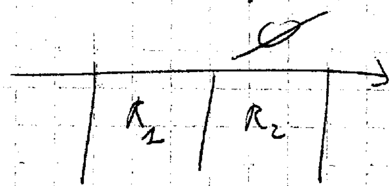
$R_{el} = \rho \frac{L}{S}$

ρ : résistivité
L : longueur dans le sens du courant.
S : section ($\perp$ courant)

$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

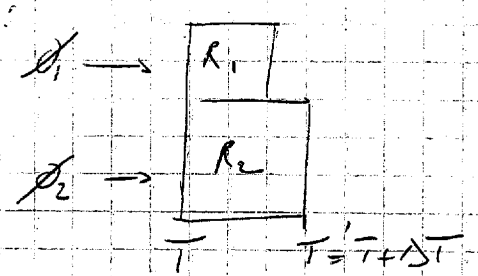
λ : conductance ou conductivité th (inverse résistivité)
L : longueur dans le sens du flux.
S : section ($\perp$ flux).

Résistance en série :



le flux est commun, les ΔT s'ajoutent $\Rightarrow$ $R_{total} = R_1 + R_2$

Résistance en parallèle :



ΔT commun, les flux s'ajoutent $\Rightarrow$ $\frac{1}{R_{totale}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

2.1) Nbre de Biot = $\dfrac{\text{Résistance interne}}{\text{Résistance de surface}} = \dfrac{L/\lambda S}{1/hS} = \dfrac{h \cdot L}{\lambda} = B_i$

L = épaisseur caractéristique $= \dfrac{V}{S} = \dfrac{4/3\,\pi R^3}{4\pi R^2} = \dfrac{R}{3}$.

$B_i = \dfrac{hR}{3\lambda} = \dfrac{10 \cdot 2.5 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 35} = 2.4 \cdot 10^{-3} \ll 1$

$\Rightarrow$ Résistance interne négligeable $\Rightarrow$ T uniforme dans la bille

$(\Delta T = R\,\phi)$

$\Rightarrow T(r,t) = T(t)$.

2.2) Chaleur élémentaire cédée : $dQ = \underbrace{hS(T - T_\infty)\,dt}_{\text{perdue par convection}} = \underbrace{-\rho c V\,dT}_{\text{refroidissement}} = -mc\,dT$

$\Rightarrow \dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{T - T_\infty}{\tau}$ $\quad \tau = \dfrac{\rho c V}{hS}$ temps caractéristique

2.3) $\dfrac{dT}{T - T_\infty} = -\dfrac{dt}{\tau}$ $\quad \log \dfrac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = -\dfrac{t}{\tau}$, $\quad T_i = T(t=0)$.

$t = \tau \log\left(\dfrac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}\right)$

Numériquement : $\tau = \dfrac{7.8 \cdot 10^3 \cdot 0.46 \cdot 10^3 \cdot 2.5 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 3} = 2990\,s$

$t = 2990 \log \dfrac{450 - 100}{150 - 100} = 5818\,s \simeq 1^h 40'$.

2.4) Flux de chaleur : $\phi = hS(T - T_\infty)$

Quantité de chaleur : $Q = \int_0^t \phi\,dt$

avec $T - T_\infty = (T_i - T_\infty)e^{-t/\tau}$

$Q = hS(T_i - T_\infty)\int_0^t e^{-t/\tau}dt = \rho c V (T_i - T_\infty)(1 - e^{-t/\tau}) = \rho c V (T_i - T_\infty - (T - T_\infty))$

$= \rho c V (T_i - T) = mc\,\Delta T$ ok.

Exercice sur la convection forcée dans une conduite chauffée en surface

On considère une conduite de diamètre D et de longueur L dans laquelle s'écoule de l'eau à la vitesse U. La température de l'eau à l'entrée de la conduite est T_i, alors que celle de la sortie est T_o. La surface de la conduite est maintenue à la température $T_S > T_i$. La conductance mise en jeu au cours des échanges convectifs entre l'eau et la paroi solide est notée h, alors que la masse volumique de l'eau est ρ, et la capacité calorifique à pression constante est C_p.

1- Ecrire le bilan énergétique des échanges thermiques pour une tranche de fluide d'épaisseur dx, située le long de l'axe x d'écoulement du fluide entre $x = x$ et $x = x + dx$ (cf. Figure jointe). La température moyenne de l'eau de la tranche d'épaisseur dx sera notée
$T_e = \frac{1}{2}\left(T(x) + T(x+dx)\right) \approx T(x)$. Montrer que l'équation de bilan peut s'écrire :

$$h\,\pi\,D\left(T_S - T(x)\right)dx = C_p\,\rho\,U\,\frac{\pi}{4}\,D^2\,\frac{dT(x)}{dx}\,dx\,.$$

2- En effectuant le changement de variable $\theta(x) = T_S - T(x)$, montrer alors que cette équation peut s'écrire $\theta(x) + A\,\frac{d\theta(x)}{dx} = 0$, avec $A = \frac{C_p\,\rho\,U\,D}{4\,h}$. En considérant une solution de cette équation différentielle sous la forme : $\theta(x) = K\exp\left(-\frac{x}{A}\right)$, montrer en utilisant les conditions aux limites $\theta_{(x=0)} = T_S - T_i$ et $\theta_{(x=+L)} = T_S - T_o$ que la température de l'eau T_o à la sortie de la conduite s'écrit finalement :

$$T_o = T_S\left(1 - \exp\left(-\frac{4\,h\,L}{C_p\,\rho\,U\,D}\right)\right) + T_i\exp\left(-\frac{4\,h\,L}{C_p\,\rho\,U\,D}\right).$$

En supposant que $C_p\,\rho\,U\,D >> 4\,h\,L$, c'est à dire pour une vitesse d'écoulement U du fluide suffisamment rapide, montrer que T_o peut s'écrire : $T_o = \left(T_S - T_i\right)\frac{4\,h\,L}{C_p\,\rho\,U\,D} + T_i$.

3- Le probléme est maintenant résolu par différence finie en considérant que la température de l'eau T_e est la moyenne de T_o et de T_i , $T_e = \frac{1}{2}\left(T_o + T_i\right)$, c'est à dire en écrivant l'équation de bilan thermique sous la forme :

$$h\,\pi\,D\,L\left(T_S - \frac{1}{2}\left(T_o + T_i\right)\right) = C_p\,\rho\,U\,\frac{\pi}{4}\,D^2\left(T_o - T_i\right).$$

Calculer T_o à partir de cette approximation. Sachant que l'inégalité de la question 2- ($C_p\,\rho\,U\,D >> 4\,h\,L$) est conservée, montrer que l'on retrouve l'expression de T_o de la question 2- : $T_o = \left(T_S - T_i\right)\frac{4\,h\,L}{C_p\,\rho\,U\,D} + T_i$.

4- Application numérique. Calculer T_o, à partir de l'équation complète :

$$T_o = \frac{h\,L\left(T_S - \frac{T_i}{2}\right) + \frac{C_p\,\rho\,U\,D}{4}\,T_i}{\frac{h\,L}{2} + \frac{C_p\,\rho\,U\,D}{4}}\,,$$

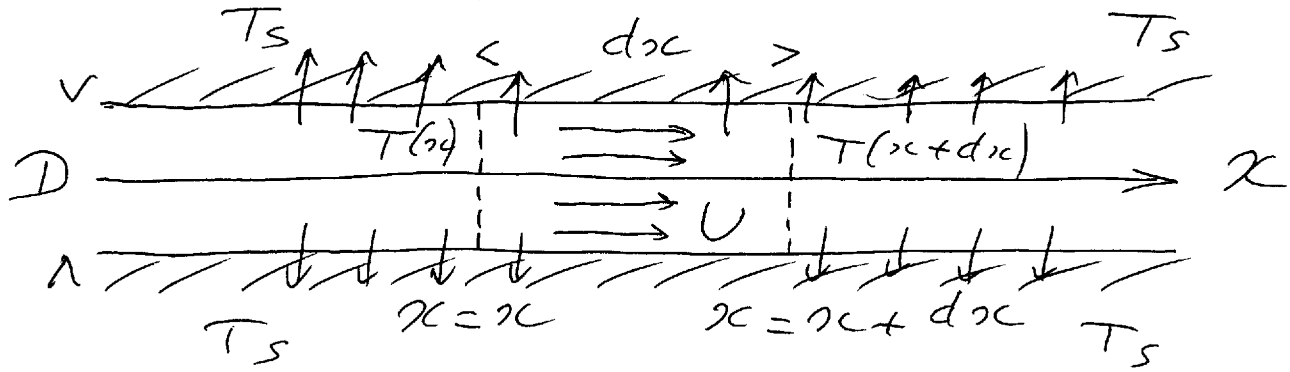
ou bien à l'aide de l'équation simplifiée $T_o = \left(T_S - T_i\right)\frac{4\,h\,L}{C_p\,\rho\,U\,D} + T_i$, avec les données suivantes (cf. Table jointe) : U = 10 cm / s ; L = 5 m ; D = 0,1 m ; T_i = 40 °C ; T_S = 90 °C.

Les propriétés de l'eau seront calculées pour la température moyenne $T_e = \frac{1}{2}\left(T_o + T_i\right)$. Le nombre de Nusselt Nu sera estimé à l'aide de la relation de Sieder et Tate : $N_u = 1{,}86\left(\frac{D}{L}\,R_e\,P_r\right)^{1/3}\left(\frac{\mu}{\mu_S}\right)^{0{,}14}$, où μ_S sera calculé à 90 °C par interpolation avec les données de la Table. Justifier que les deux expressions de T_o fournissent des valeurs numériques très proches du fait que $C_p\,\rho\,U\,D >> 4\,h\,L$.

T (°C)	T (K)	ρ (kg/m^3)	c_p ($kJ/kg \cdot K$)	$\mu \times 10^3$ ($Pa \cdot s$, or $kg/m \cdot s$)	k ($W/m \cdot K$)	N_{Pr}	$\beta \times 10^4$ ($1/K$)	$(g\beta\rho^2/\mu^2) \times 10^{-8}$ ($/K \cdot m^3$)
0	273.2	999.6	4.229	1.786	0.5694	13.3	−0.630	
15.6	288.8	998.0	4.187	1.131	0.5884	8.07	1.44	10.93
26.7	299.9	996.4	4.183	0.860	0.6109	5.89	2.34	30.70
37.8	311.0	994.7	4.183	0.682	0.6283	4.51	3.24	68.0
65.6	338.8	981.9	4.187	0.432	0.6629	2.72	5.04	256.2
93.3	366.5	962.7	4.229	0.3066	0.6802	1.91	6.66	642
121.1	394.3	943.5	4.271	0.2381	0.6836	1.49	8.46	1,300
148.9	422.1	917.9	4.312	0.1935	0.6836	1.22	10.08	2,231
204.4	477.6	858.6	4.522	0.1384	0.6611	0.950	14.04	5,308
260.0	533.2	784.9	4.982	0.1042	0.6040	0.859	19.8	11,030
315.6	588.8	679.2	6.322	0.0862	0.5071	1.07	31.5	19,260

Exercice : Convection forcée dans une conduite chauffée en surface

1 -



La quantité de chaleur échangée par convection s'écrit (pour la tranche d'épaisseur dx) :

$$q = h\,dS\,(T_s - T_e) = h\pi D\,dx\,(T_s - T_e),$$

soit en prenant pour la température de l'eau de la tranche dx :

$$T_e = \frac{1}{2}\left(T(x) + T(x+dx)\right) \simeq T(x)$$

Par ailleurs, $q = \dot{m}\,C_p\left(T(x+dx) - T(x)\right)$

$$\Rightarrow q = \dot{m}\,C_p\left(T(x) + \frac{dT(x)}{dx}dx - T(x)\right)$$

$$= \dot{m}\,C_p\,\frac{dT(x)}{dx}, \quad \text{avec } \dot{m} = \rho U \frac{\pi}{4} D^2$$

$$\Rightarrow h\pi D\left(T_s - T(x)\right)dx = C_p \rho U \frac{\pi}{4} D^2 \frac{dT(x)}{dx} dx$$

$$\Rightarrow h\left(T_s - T(x)\right) = C_p \frac{\rho U}{4} D \frac{dT(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow T_s - T(x) = \theta(x) = \frac{C_p \rho U D}{4h} \frac{dT(x)}{dx}$$

$$\theta(x) = T_s - T(x) \Rightarrow \frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{dT(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \theta(x) + \frac{C_p \rho U D}{4h} \frac{d\theta(x)}{dx} = 0$$

2 – Soit en notant $A = \dfrac{C_p \rho U D}{4h}$

$$\Rightarrow \quad \theta(x) + A \frac{d\theta(x)}{dx} = 0,$$

de solution $\theta(x) = K e^{-\frac{x}{A}}$

$$\Rightarrow K e^{-\frac{x}{A}} + A \times K \times \left(-\frac{1}{A}\right) e^{-\frac{x}{A}} = 0$$

CQFD

$$\theta(x) = K e^{-\frac{x}{A}} \Rightarrow \theta(x=0) = K$$

or $\theta(0) = T_s - T_i \Rightarrow K = T_s - T_i$

$$\Rightarrow \theta(x) = (T_s - T_i) e^{-\frac{x}{A}}$$

De même : $\theta(x=L) = (T_s - T_i) e^{-\frac{L}{A}}$
$= T_s - T_0$

$$\Rightarrow T_0 = T_s\left(1 - e^{-\frac{L}{A}}\right) + T_i e^{-\frac{L}{A}}$$

$$T_0 = T_s\left(1 - e^{-\frac{4Lh}{\rho C_p U D}}\right) + T_i e^{-\frac{4Lh}{\rho C_p U D}}$$

soit en supposant que $\rho C_p U D \gg 4Lh$, c'est à dire pour un écoulement suffisant :

$$e^{-\frac{4hL}{\rho C_p U D}} \simeq 1 - \frac{4Lh}{\rho C_p U D}$$

$$T_0 = T_s\left(1 - 1 + \frac{4Lh}{\rho C_p U D}\right) + T_i\left(1 - \frac{4Lh}{\rho C_p U D}\right)$$

$$\Rightarrow \quad T_0 = (T_s - T_i)\frac{4Lh}{\rho C_p U D} + T_i \qquad (1)$$

3 – On peut aussi effectuer le calcul direct sans passer par l'équation différentielle (cf. exercice réalisé en cours) :

$$h\pi D L\left[T_s - \left(\frac{T_i + T_0}{2}\right)\right] = \rho \frac{U\pi}{4} D^2 C_p (T_0 - T_i)$$

$$hL\left[T_s - \left(\frac{T_i + T_0}{2}\right)\right] = \rho \frac{U}{4} D C_p (T_0 - T_i)$$

$$hL\left(T_s - \frac{T_i}{2}\right) - hL\frac{T_0}{2} = \rho\frac{U}{4} D C_p T_0 - \rho \frac{U}{4} D C_p T_i$$

$$T_0\left(hL + \frac{\rho U D C_p}{2}\right) = T_i\left(\frac{\rho U D C_p}{2} - hL\right) + 2hLT_s$$

$$T_0\left(1 + \frac{2hL}{\rho U D C_p}\right) = T_i\left(1 - \frac{2hL}{\rho U D C_p}\right) + \frac{4hL}{\rho U D C_p} T_s$$

$$\Rightarrow T_0 = T_i \frac{\left(1 - \frac{2hL}{\rho U D C_p}\right)}{\left(1 + \frac{2hL}{\rho U D C_p}\right)} + \frac{\frac{4hL}{\rho U D C_p} T_s}{\left(1 + \frac{2hL}{\rho U D C_p}\right)}$$

de la forme :

$$T_0 = T_i\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) + \frac{2\varepsilon T_s}{1+\varepsilon}, \quad \text{avec } \varepsilon = \frac{2hL}{\rho U D C_p}$$

soit en supposant $\rho U D C_p \gg 2hL$

$$\Rightarrow T_0 = T_i(1-\varepsilon)^2 + 2\varepsilon(1-\varepsilon)T_s$$

$$T_0 = T_i(1 - 2\varepsilon) + 2\varepsilon T_s$$

$$T_0 = T_i\left(1 - \frac{4hL}{\rho U D C_p}\right) + \frac{4hL}{\rho U D C_p} T_s$$

$$\Rightarrow \quad T_o = (T_s - T_i)\frac{4hL}{\rho U D C_p} + T_i \qquad (1)$$

CQFD

4 – Application numérique :

$U = 10\ cm/s$; $L = 5\ m$; $D = 0{,}1\ m$

$T_i = 40°C$; $T_s = 90°C$

$$T_o = \frac{hL\left(T_s - \frac{T_i}{2}\right) + \frac{\rho U}{4} D\, C_p\, T_i}{\frac{hL}{2} + \frac{\rho U}{4} D\, C_p} \qquad (2)$$

Les propriétés de l'eau sont calculées pour la température moyenne $T_e = \frac{1}{2}(T_i + T_s) = \frac{1}{2}(40 + 90) = 65°C$, à savoir :

$$\begin{cases} \rho = 981{,}9\ kg/m^3 \ ; \ C_p = 4{,}187\ kJ/kg\cdot K \\ \mu = 0{,}432\times10^{-3}\ kg/m\cdot s, \ \lambda = 0{,}6629\ W/m\cdot K \\ P_r = 2{,}72 \end{cases}$$

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{981{,}9\times0{,}1\times0{,}1}{0{,}432\times10^{-3}} = 22729$$

$$\left(\frac{D}{L}\right) Re\, P_r = \frac{2473}{2} > 10 \quad OK$$

$$Nu = 1{,}86\,(1236{,}5)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{4{,}32}{2{,}85}\right)^{0{,}14} = 20{,}82$$

$$h = \frac{Nu\,\lambda}{D} = \frac{20{,}82\times0{,}6629}{0{,}1} = 138\ W/m^2\cdot°C$$

$hL = 690\ SI$; $\frac{\rho U D C_p}{4} = 10278\ SI$

$T_o = 43{,}25°C$ et $T_o = 43{,}36°C$ selon l'une ou l'autre des deux équations (1) et (2)

Résultats comparables du fait que $\rho U D C_p \gg 4hL$.